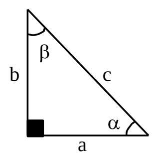
Curso: Trigonometría

Ciclo Invierno 2020
TEMA N° 02

2) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

1) **Razón Trigonométrica**: Es el cociente que se establece entre dos de los lados de un triángulo rectángulo. Son seis razones trigonométricas:



c.o. = Cateto opuesto
c.a. = Cateto adyacente
Hip. = Hipotenusa

Seno = $\frac{\text{c.o.}}{\text{Hip}}$ ... (Sen α = b/c = Cos β)

Coseno = $\frac{\text{c.a.}}{\text{Hip.}}$ ... (Cos α = a/c = Sen β)

Tangente = $\frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$ ... (Tg α = b/a = Ctg β)

Cotangente = $\frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$ ... (Ctgα = a/b = Tg β)

Secante = $\frac{\text{Hip.}}{\text{c.a.}}$ ... (Sec α = c/a = Csc β)

Cosecante = $\frac{\text{Hip.}}{\text{c.o.}}$ ... (Cscα=c/b = Sec β)

2) **Razones Recíprocas**:
Son recíprocas:

Son recíprocas		
Sen $\alpha \leftrightarrow$ Csc α	cumple $\Rightarrow$	Senα Csc α = 1
Cos $\alpha \leftrightarrow$ Sec α		Cosα Sec α = 1
Tg $\alpha \leftrightarrow$ Ctg α		Tg α Ctg α = 1

Nota: Si el producto de dos razones recíprocas es “1” entonces los ángulos son iguales.

3) **Razones de ángulos complementarios**:

La R.T. de un ángulo agudo es igual a la respectiva co–razón del ángulo complementario.

Si:
$\alpha+\beta = 90^o$ cumple $\Rightarrow$ $\boxed{\text{RT }(\alpha) = \text{C–RT }(90–\alpha)}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sen } \alpha = \text{Cos } \beta \\ \text{Tg } \alpha = \text{Ctg } \beta \\ \text{Sec } \alpha = \text{Csc } \beta\end{array}\right\} \alpha + \beta = 90^o$$

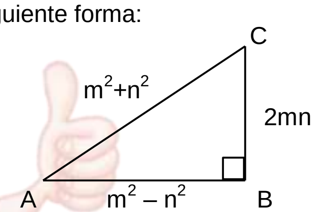
Nota: Para un ángulo “x”

Sen x = Cos (90º – x)
Tg x = Ctg (90º – x)
Sec x = Csc (90º – x)

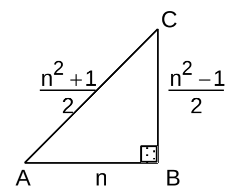
4 **Propiedades**

- Toda RT o FT es una cantidad numérica adimensional.
- Toda RT sólo depende del ángulo respecto al cual se define.
- El seno y coseno toma valores entre 0 y 1.
- La tangente y cotangente toma valores mayores que cero.
- La secante y cosecante toma valores mayores que 1.

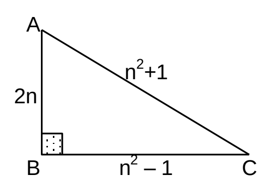
5) **Triángulos Pitagóricos**
Se denomina de esta manera a aquellos triángulos rectángulos cuya medida de sus lados están expresados por números enteros. Los lados de un triángulo pitagórico tienen la siguiente forma:



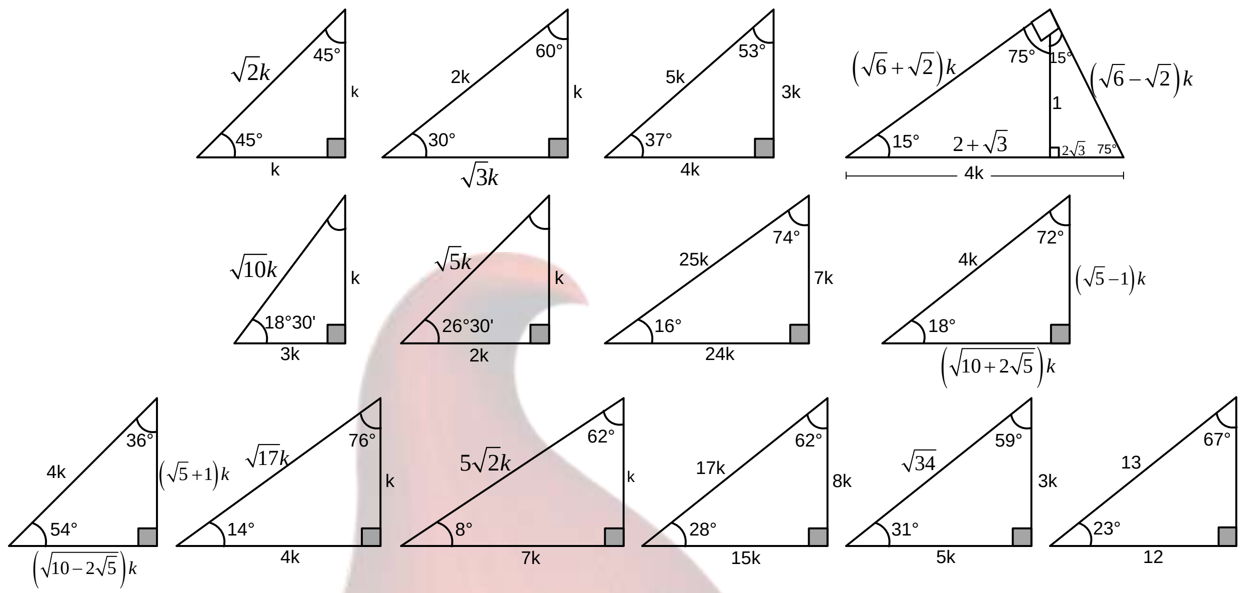
m y n son números enteros positivos.
m > n
De la forma general se deducen casos particulares:
n $\rightarrow$ impar (> 1)



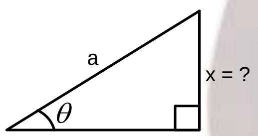
n $\rightarrow$ par (> 2)



6) Triángulos Notables

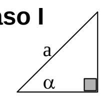


7) Resolución de un Triángulo Rectángulo



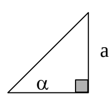
Lado (x) = (Lado conocido) $\times \left(\dfrac{Necesito}{Tengo}\right)$

Caso I



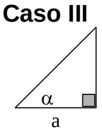
Cateto adyacente = a Cos α
Cateto opuesto = a Sen α

Casto II



Cateto adyacente = a Ctg α
Hipotenusa = a Csc α

Caso III

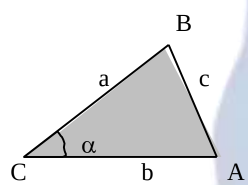


Cateto opuesto = a Tg α
Hipotenusa = a Sec α

8) Área de un Triángulo cualquiera

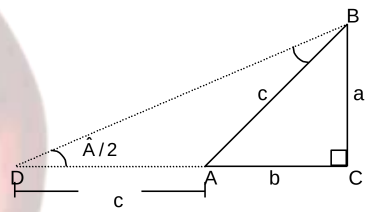
$$\text{Área}\Delta = \frac{\text{Base.altura}}{2}$$

$$\text{Área}\Delta = \frac{ab}{2}\text{Sen}\,\alpha$$



9) Angulo Mitad: Una forma práctica para calcular las razones trigonométricas de la mitad de un ángulo agudo es la siguiente:
Partimos de un triángulo rectángulo ABC (Ver figura).

Si queremos las razones trigonométricas de $\left(\dfrac{A}{2}\right)$ entonces prolongamos el cateto $\overline{CA}$ hasta un punto "D" tal que: $\overline{AD} = \overline{AB}$. Luego el triángulo DAB es isósceles $B\hat{D}A = \dfrac{\hat{A}}{2}$.



$$\therefore\ \text{Cot}\frac{\hat{A}}{2} = \frac{c+b}{a}$$

Entonces : $\text{Cot}\dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{c}{a} + \dfrac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\text{Cot}\dfrac{\hat{A}}{2} = \text{Csc}\hat{A} + \text{Cot}\hat{A}}$

Análogamente:

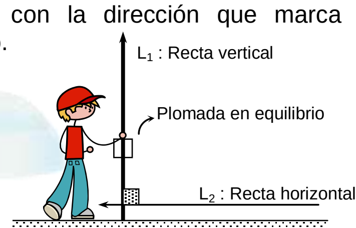
$$\text{Tan}\frac{\hat{A}}{2} = \frac{a}{b+c} = \frac{c-b}{a} \Rightarrow \boxed{\text{Tan}\frac{A}{2} = \text{Csc}\hat{A} - \text{Cot}\hat{A}}$$

ÁNGULOS VERTICALES Y HORIZONTALES

En el presente tema estudiaremos aplicaciones de triángulos rectángulos, que tienen gran utilidad en la vida diaria; como por ejemplo: en la topografía, navegación.
Los ángulos verticales y horizontales tienen en común la referencia de un observador o punto de observación y el objeto observado.

Definiciones importantes:

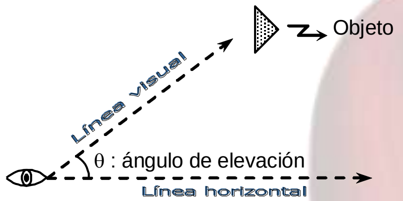
a) **Línea vertical**: La vertical de un lugar es la línea que coincide con la dirección que marca la plomada en equilibrio.



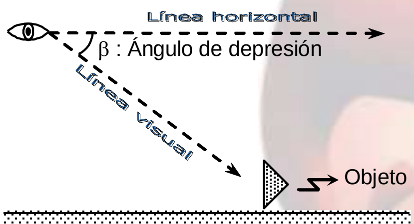
b) **Línea horizontal**: Es toda perpendicular a la línea vertical.
c) **Línea visual**: Es aquella línea imaginaria que une los ojos del observador con un punto al objeto, el cual se está observando.
d) **Plano vertical**: Es aquel plano que contiene una línea vertical.
e) **Plano horizontal**: Plano perpendicular a la vertical.

ANGULOS VERTICALES:
Son aquellos ángulos agudos contenidos en un plano vertical, el cual contiene tanto al observador como al objeto observado. Dentro de este tipo de ángulo tenemos el ángulo de elevación y el ángulo de presión.

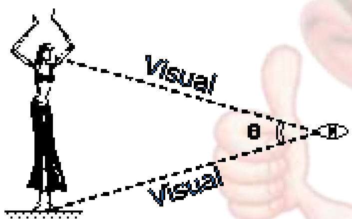
1) Ángulos de elevación (α): Se forma entre una línea horizontal que parte de la vista del observador y una línea visual, cuando el objeto observado se encuentra por encima de la línea horizontal.



2) Ángulo de depresión (β): Se forma entre una línea horizontal que parte de la vista del observador y la visual, cuando el objeto observado se encuentra por debajo de dicha línea horizontal.

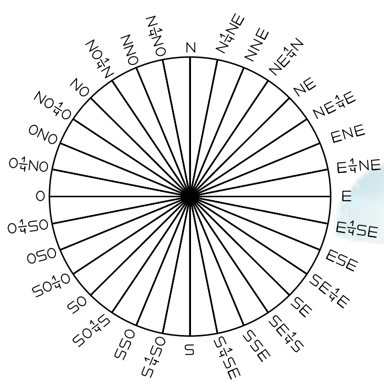


3) Ángulo de observación (θ): Es aquel ángulo formado por dos visuales que parten desde un mismo punto, al observar un objeto de un extremo a otro.

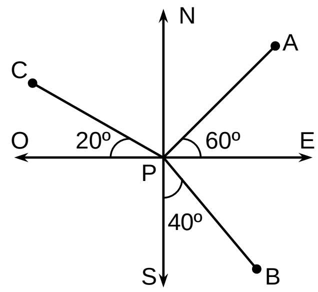


ÁNGULOS HORIZONTALES:
Son aquellos ángulos contenidos en un plano horizontal.

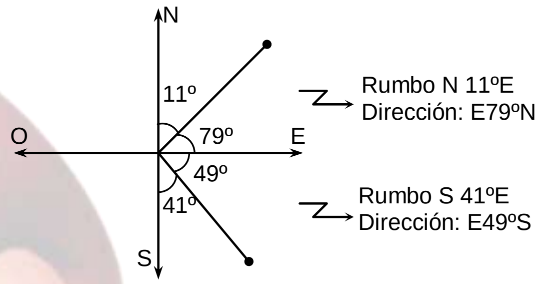
La rosa náutica o compás marino: Es la representación esquemática de la brújula náutica, la cual está dividida en 32 partes iguales, por tanto cada parte es 360º ÷ 32 = 11º15'.



La Dirección:
La dirección de un punto "A" con relación a un observador "P" se puede dar de dos formas: el punto "A" se encuentra del Este 60º hacia el Norte (E60ºN) del punto "P" ó "A" se encuentra del norte 30º hacia el este (N30ºE) del punto "P". "B" se encuentra en la dirección S40ºE del punto "P" o "B" se encuentra al E50ºS de "P".



El rumbo: Es una dirección la cual está dada como el ángulo entre la línea de dirección magnética norte, sur y la línea de dirección hacia el objeto.



Toda dirección no es un rumbo pero todo rumbo si es una dirección.
Del ejemplo anterior: N11ºE es un rumbo y también una dirección pero la dirección E79ºN no es un rumbo.

Situaciones combinadas
Cuando los enunciados de los problemas mencionan ángulos verticales (elevación o depresión) y ángulos horizontales (uso de direcciones), al mismo tiempo, la rosa náutica a emplear asume una posición más real: Es decir ubicada en un plano horizontal. Ejemplo:
Desde un punto en tierra, se divisa al norte lo alto de un poste con un ángulo de elevación "α". Si luego nos desplazamos hacia el N60ºE, hasta ubicarnos al este del poste, el ángulo de elevación para su parte más alta sería "β". Ahora note la representación gráfica.