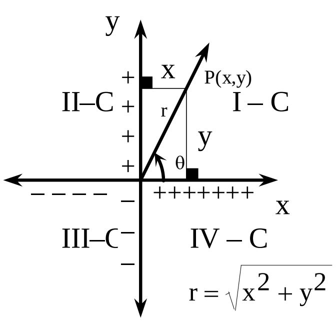
Curso: Trigonometría

Ciclo Invierno 2020
TEMA N° 03

3) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO DE CUALQUIER MAGNITUD

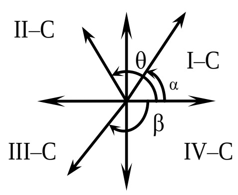
1) Definiciones previas

1.1 **Sistema de Coordenadas Rectangulares**. Este sistema consta de dos rectas dirigidas (rectas numéricas) perpendiculares entre sí, llamados ejes coordenados.



P(x,y): Se lee el punto P de coordenadas x, y.
x : Abscisa de P.
y : Ordenada de P.
r : Radio vector. Siempre positivo

1.2 **Angulo en posición normal**. Es aquel ángulo trigonométrico cuyo lado inicial esta sobre el semieje positivo de abscisas y su vértice coincide con el origen del sistema de coordenadas rectangulares y su lado final se encuentra en cualquier parte del plano. En las figuras adjuntas α, β y θ son ángulos en posición normal.



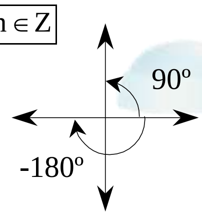
$\alpha \in I - C$

$\theta \in II - C$

$\beta \in III - C$

1.3 **Ángulos Cuadrantales**. Son aquellos ángulos en posición normal cuyo lado final coincide con alguno de los semiejes del sistema de coordenadas rectangulares.
Todos los ángulos cuadrantales se representan:

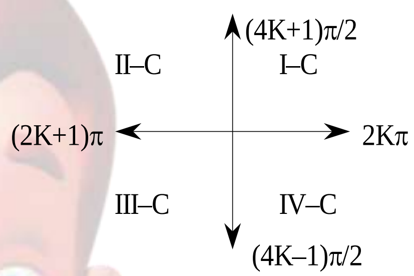
$\boxed{K\frac{\pi}{2}\ ;\ K \in Z}$ o $\boxed{n(90^o)\ ;\ n \in Z}$



Observación:

$\alpha = K\frac{\pi}{2}$; representa a todos los ángulos cuadrantales.

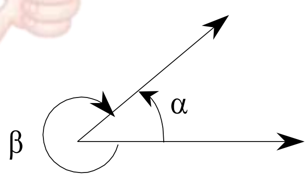
Hay otras formas particulares que representan a determinados ángulos cuadrantales de acuerdo a la posición del lado final.



$k \in Z$

1.4 **Ángulos Coterminales**. (Cofinales). Son todos aquellos ángulos que tienen los mismos elementos (vértice, lado inicial y lado final) α y β: son coterminales.

(no interesa el sentido de rotación)



Observación: Dos ángulos coterminales se diferencian en un número entero de vueltas:

Si α y β son coterminales.

CUMPLE

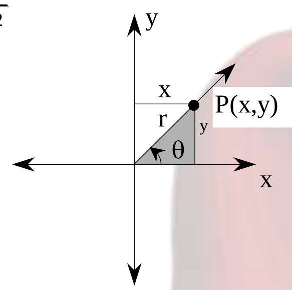
$\boxed{\alpha - \beta = K \cdot 360^o}$ si α y β están en grados sexagesimales

$\boxed{\alpha - \beta = K \cdot 2\pi}$ si α y β están en radianes
$K \in Z$

2) Definición de las razones trigonométricas de ángulos en posición normal

Son las razones por cocientes que se establece entre las coordenadas de un punto del lado final de un ángulo en posición normal y el radio vector. Sea P(x, y) un punto que pertenece al lado final del ángulo θ (θ ángulo en posición normal). $\overline{OP} = r$ = radio vector. Entonces las R.T. de θ se definen.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



r: siempre positivo

$$\text{Sen}\,\theta = \frac{\text{Ordenada de P}}{\text{radio vector}} = \frac{y}{r} \qquad \text{Cos}\theta = \frac{\text{Abscisa de P}}{\text{Radio vector}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{Tg}\theta = \frac{\text{Ordenada de P}}{\text{Abscisa de P}} = \frac{y}{x} \qquad \text{Ctg}\theta = \frac{\text{Abscisade P}}{\text{Ordenadade P}} = \frac{x}{y}$$

$$\text{Sec}\theta = \frac{\text{Radiovector}}{\text{abscisade P}} = \frac{r}{x} \qquad \text{Csc}\theta = \frac{\text{Radio vector}}{\text{Ordenadade P}} = \frac{r}{y}$$

3) Propiedades fundamentales

3.1 **Signos de las Razones Trigonométricas**.

	IC	IIC	IIIC	IVC
Sen	+	+	–	–
Cos	+	–	–	+
Tg	+	–	+	–
Ctg	+	–	+	–
Sec	+	–	–	+
Csc	+	+	–	–

Método práctico

S Sen; Csc: ⊕	P Todas las R.T. son ⊕
T Tg; Ctg: ⊕	C Cos; Sec: ⊕

3.2 **Razones trigonométricas de los ángulos cuadrantales principales**.

	0	π/2	π	3π/2	2πrad
AT / OT	0º	90º	180º	270º	360º
Sen	0	1	0	-1	0
Cos	1	0	-1	0	1
Tg	0	∄	0	∄	0
Ctg	∄	0	∄	0	∄
Sec	1	∄	-1	∄	1
Csc	∄	1	∄	-1	∄

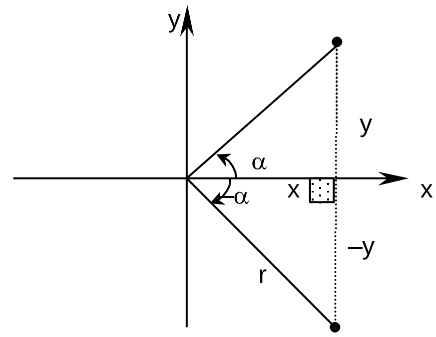
∄ : No existe, o no esta definido.

3.3 **Razones trigonométricas de ángulos coterminales**. Dos ángulos coterminales en posición normal tienen las mismas razones trigonométricas.
Sea α y β: coterminales.

CUMPLE ⇒ $\boxed{RT(\alpha) = RT(\beta)}$ pero: $\beta - \alpha = 2K\pi$
o
$RT(\alpha) = RT(\alpha + 2K\pi)$

¡**Ojo**! Si a un ángulo dado le sumamos o restamos un número entero de vueltas, el valor de las razones trigonométricas permanecen constantes.

3.4 **Razones Trigonométricas de ángulos negativos**
Para ello graficamos un ángulo "α" en el primer cuadrante y "–α" en el cuarto cuadrante.



Sabemos que:

a) $\text{Sen}\alpha = \frac{y}{r}$; $\text{Cos}\alpha = \frac{x}{r}$; $\text{Tan}\alpha = \frac{y}{x}$

De igual manera se deduce:
b) Sen (–α) = –y/r; Cos (–α) = x/r; Tan (–α) = –y/x

Comparando (a) y (b) se deduce:

Sen (–α) = –Sen α
Cos (–α) = Cos α
Tan (–α) = –Tan α

De la forma análoga

Cot (–α) = –Cot α
Sec (–α) = Sec α
Csc (–α) = –Csc α

- Seno, tangente, cotangente, cosecante son funciones impares.
- Coseno y secante son funciones pares.

OBSERVACIÓN:

Para determinar el cuadrante al que pertenece un ángulo se presentan los siguientes casos:

* Si el ángulo es positivo y mayor de una vuelta, se divide el ángulo entre 360°, luego se analiza el residuo, ejemplo:
a) 800° … 800° |360°
 80° 2
 Como 80° ∈ IC ⇒ 800° ∈ IC

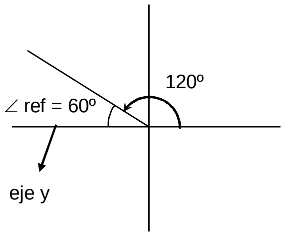
* Si el ángulo es negativo en este caso se suma 360° al ángulo θ al residuo. Ejemplo:
a) –20° ……. –20° + 360° = 340° ∈ IVC ⇒ –20 ∈ IVC

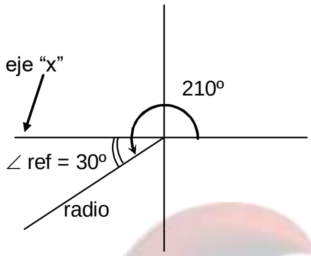
b) –2400° … –2400° |360°
 –240° –6
Entonces:
–240°+360°=120°∈IIC ⇒ –2400°∈IIC.

* Si el ángulo es mayor de 90º se utiliza el ∠ de referencia.

Angulo de referencia: Es el ángulo agudo que forma el radio vector con el eje "x" más cercano.

Ejemplo:
α = 120º $\qquad\qquad$ α = 210º

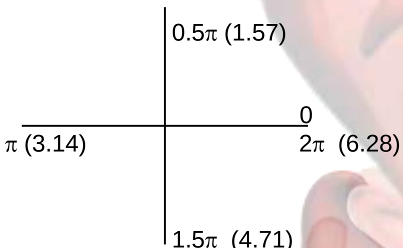




Propiedad: Para un ángulo mayor de 90º su razón trigonométrica es igual a la de su ángulo de referencia con su respectivo signo del cuadrante.

Ejemplo:
- Sen 120º = + Sen 60º
  Positivo porque 120º $\in$ IIQ
- Tan 210º = + Tan 30º
  Positivo porque 210º $\in$ IIIQ
- Csc 315º = –Csc 45º
  Negativo porque 310º $\in$ IVQ
  Y cosecante es negativo.

* Para el sistema radial
Si el ángulo es positivo y menor de una vuelta su ubicación en los cuadrantes se observa en el siguiente cuadro.



Si: $0 < \theta < 0.5\pi \Rightarrow \theta \in$ IC
Si: $\pi < \theta < 1.5\pi \Rightarrow \theta \in$ I IC
$\theta < 2\pi \Rightarrow \theta \in$ IVC

4. VALOR ABSOLUTO

Se define:

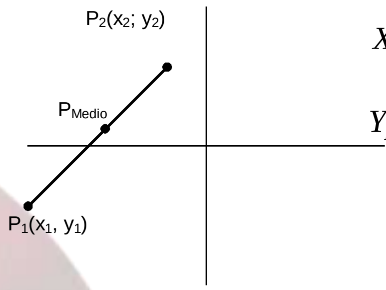
$$|x| = \begin{matrix} x \leftrightarrow x \geq 0 \\ -x \leftrightarrow x < 0 \end{matrix}$$

Propiedades:
- $|x|^2 = x^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x.y| = |x||y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|Kx| = K|x| \Leftrightarrow K \in Z$
- $|x| = |a|$; x = a $\vee$ x = –a
- Si: a > 0, $|x| \geq a \rightarrow x \geq a \vee x \leq -a$
- Si: a > 0, $|x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$
- $b > a > 0$, $a < |x| < b \rightarrow -b < x < -a \vee a < x < b$
- Si: $\overset{+}{\#} < x < \overset{+}{\#} \rightarrow |\overset{+}{\#}| < |x| < |\overset{+}{\#}|$
- Si: $\overset{-}{\#} < x < \overset{-}{\#} \rightarrow |\#| > |x| > |\#|$
- Si: $\overset{-}{\#} < x < \overset{+}{\#} \rightarrow 0 \leq |x| < |\#|$ (mayor)

Otras propiedades:
$\#^+ < x < \#^+ \rightarrow \#^2 < x^2 < \#^2$
$\#^- < x < \#^- \rightarrow \#^2 > x^2 > \#^2$
$\#^- < x < \#^+ \rightarrow 0 \leq x^2 < \#^2$ (mayor)

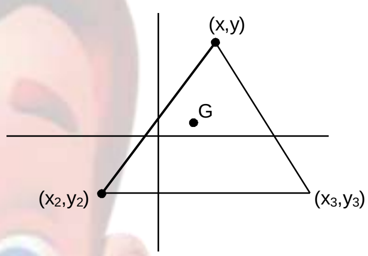
5. Coordenadas cartesianas:

Coordenadas del punto medio:



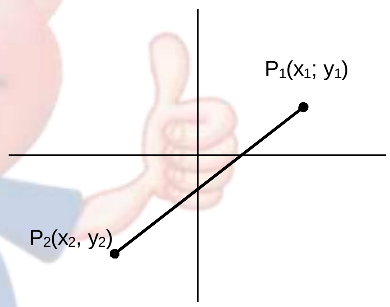
$$X_{Medio} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$Y_{Medio} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Coordenadas de Baricentro:



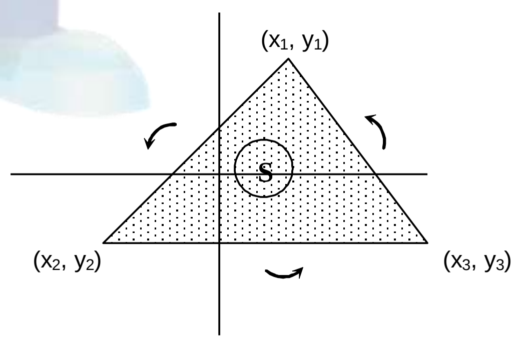
$$X_G = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$
$$Y_G = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$$

Distancia entre dos puntos



$$d_{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

6. Área de un triángulo



Formar el siguiente determinante:

$$
+\left\{\begin{matrix} y_1x_2 \\ y_2x_3 \\ y_3x_1 \\ \hline \text{I} \end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{matrix}\right| \quad \left.\begin{matrix} x_1y_2 \\ x_2y_3 \\ x_3y_1 \\ \hline \text{D} \end{matrix}\right\}+
$$

Hallar I e D sumando los términos de la izquierda y derecha del determinante. Finalmente. Calcular "S":

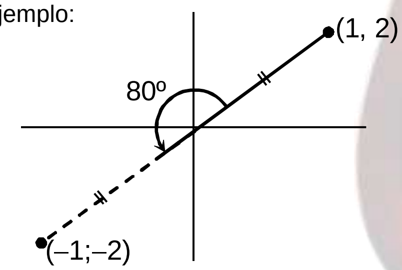
$$\boxed{S=\frac{1}{2}(D-\text{I})}$$

Rotaciones:

Caso I

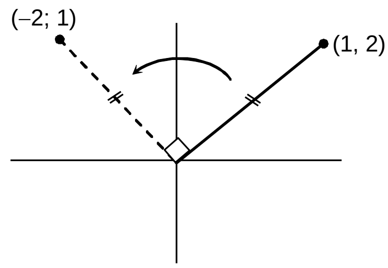
Si el radio vector se rota 180º las coordenadas del radio cambian de signo solamente.

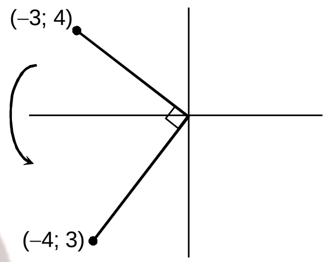
Ejemplo:



Caso II

Si el radio vector se rota 90º las coordenadas cambian de posición y en algunos casos de signo (–2, 1).





Variacion de las Funciones Trigonométricas

$-1 \le Sen\alpha \le 1$ $\qquad$ $-1 \le Cos\alpha \le 1$

$-\infty \le Tg\alpha \le \infty$ $\qquad$ $-\infty \le Ctg\alpha \le \infty$

$Sec\alpha \le 1 \vee Sec\alpha \le -1$ $\qquad$ $Csc\alpha \ge 1 \vee Csc\alpha \le -1$

"Estudiar, practicar y repasar para poder ingresar y después triunfar por los siglos de los siglos". Amén