Curso: Razonamiento Matemático

Ciclo Invierno 2020
TEMA N° 04

# 4) OPERADORES MATEMÁTICOS

**¿QUÉ ES UN OPERADOR MATEMÁTICO?**
Es aquel símbolo que representa a una operación matemática, con su respectiva regla de definición. Como ejemplos de operadores matemáticos tenemos:

$$a * b = \underbrace{2a+3b^2}_{\text{Regla de definición}} \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{1+2+3+4+...+n}_{\text{Regla de definición}}$$

Operador Matemático ($*$) — Operador Matemático ($\sum$)

**PROPIEDADES:**
En un conjunto A ≠ ϕ, definimos una operación matemática simbolizada por (✳), entonces estudiaremos las siguientes propiedades:

1) <u>**Clausura o cerradura**</u>

$$\boxed{\forall\ a \wedge b \in A \Rightarrow a \ast b \in A}$$

**Ejemplo 1:**

Se define en Z : $m\Delta n = \dfrac{m^2}{n}$

¿La operación definida es cerrada en Z?

<u>Resolución</u>:

Calculemos: $1\Delta 2 = \dfrac{1^2}{2} = \dfrac{1}{2} \notin Z$

∴ Δ no es cerrada

**Ejemplo 2**:
En A = {1, 2, 3, 4} se define la operación Δ, mediante la siguiente tabla:

| Δ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

¿La operación es cerrada en A?

<u>Resolución</u>:
a Δ b ∈ A
∀ a, b ∈ A
∴ Δ es cerrada

2) <u>**Conmutatividad**</u>

$$\boxed{\forall\ a \wedge b \in A \Rightarrow a \ast b = b \ast a}$$

**Ejemplo 1 :**
Se define en Q:
a ✳ b = a + b – ab
Para saber si cumple o no con la conmutatividad calculamos: b ✳ a.
a ✳ a = b + a – ba
Comparemos los segundos miembros:
a + b – ab y b + a – ba
Son iguales, por lo tanto, la operación ✳ es conmutativa.

**Ejemplo 2 :**
En el conjunto: A = {a, b, c, d} se define la operación representada por ✳ mediante la siguiente tabla:

| ✳ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | c | d | a |
| c | c | d | a | b |
| d | d | a | b | c |

¿La operación, así definida, será conmutativa?
<u>Resolución</u>:
x * y = y * x ∀ x, y ∈ A
∴ x es conmutativa

3. <u>**Elemento neutro (e)**</u>:

$$\boxed{a \wedge e \in A} \Rightarrow \boxed{a * e = e * a = a}$$

Sea “e” un elemento del conjunto A, tal que al operarlo con algún elemento “a” también del conjunto A, tanto a derecha como a izquierda, da como resultado el mismo elemento “a”. Si este elemento “e” existe, se llamará “ELEMENTO NEUTRO.

**Nota**: Se debe tener en cuenta que si una operación matemática tiene elemento neutro, éste es único.

En Tablas:

| * | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | d | a | b | c |
| b | a | b | c | d |
| c | b | c | d | a |
| d | c | d | a | b |

La operación mostrada en la tabla, ¿tiene elemento neutro?
Para determinar si tiene elemento neutro utilizaremos EL CRITERIO DE LA INTERSECCIÓN.

**Criterio de intersección columna – fila**

1. Ubicar, en el cuerpo de la tabla, una columna igual a la columna de entrada y una fila igual a la fila de entrada.

2. La intersección de la columna y fila mencionadas nos dará el elemento neutro (el).

Veamos

| * | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | d | a | b | c |
| b | a | b | c | d |
| c | b | c | d | a |
| d | c | d | a | b |

Filas iguales

Columnas iguales

Observando la intersección, concluimos que : e = b

**4. Elemento inverso ($a^{-1}$)**:

$\boxed{\forall\ a, a^{-1}, e \in A} \Rightarrow \boxed{a * a^{-1} = a^{-1} * a = e}$

**PROBLEMAS DESARROLLADOS**

1) Si: $\left\langle x^2 + x^3 \right\rangle = x^5 + x - 1$. Hallar $\langle 1|$.

**Solución**:

Si: $\left\langle x^2 + x^3 \right| = x^5 + x - 1$

sea: $x^2 + x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = 1 - x^3$

Entonces:

$\Rightarrow \langle 1| = x^5 + x - 1 = x^3.x^2 + x - 1$

$\Rightarrow \langle 1| = (1 - x^2)x^2 + x - 1$

$\Rightarrow \langle 1| = x^2 - x^4 + x - 1 = x^2 - x^3.x + x - 1$

$\Rightarrow \langle 1| = x^2 - (1 - x^2).x + x - 1 = x^2 - \cancel{x} + x^3 + \cancel{x} - 1$

$\Rightarrow \langle 1| = x^2 + x^3 - 1 = \cancel{x^2} + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{1}$

$\therefore \langle 1| = 0$

2) Si: $\oint_m n = m + 3n$, además $\oint_{x^{-1}} y = 1$, calcule

$$E = y + (3y - 1)x$$

**Solución**:
Veamos:

$\Rightarrow \oint_{x^{-1}} y = 1 = x^{-1} + 3y$

$\Rightarrow \oint_{x^{-1}} y = \dfrac{1}{x} + 3y = 1$

$1 + 3xy = x \Rightarrow 3xy - x = -1$

$x(3y - 1) = -1 \ldots (1)$

Reemplazando (1)

$E = y + (3y - 1)x = y - 1$

$\therefore E = y - 1$

3) Si $\boxed{x-1} = x^2 + x$ ; $x > 0.1$, entonces el valor de "$a + 4$" en $\boxed{\boxed{\boxed{3a-12}}} = 182$ es:

**Solución**:

Entonces $\boxed{x-1} = x^2 + x = x(x+1)$ ; $x > 0$

$\Rightarrow \boxed{\boxed{\boxed{3a-12}}} = 182 = 13 \times 14$

$\Rightarrow \boxed{\boxed{3a-12}} = 12 = 3 \times 4$

$\Rightarrow \boxed{3a-12} = 2 = 1 \times 2$

$\Rightarrow 3a - 12 = 0$

$\Rightarrow a = 4$

$\therefore a + 4 = 8$

**"Estudiar, practicar y repasar para poder ingresar y después triunfar por los siglos de los siglos". Amén**