Curso: Álgebra

Ciclo Invierno 2020
TEMA N° 06

FACTORIZACIÓN

Proceso inverso de la multiplicación por medio del cual una expresión algebraica racional entera es presentada como el producto de dos o más factores algebraicos.

Factor Divisor: Un polinomio no constante es factor de otro cuando lo divide exactamente, por lo cual también es llamado divisor.

Factor Primo Racional: Llamamos así a aquel polinomio que no se puede descomponer en otros factores. Racionales dentro del mismo campo.

Ejemplo: El proceso
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
es una multiplicación.

En cambio el proceso
$x^2 + (a + b)x + ab = (a + b)(x + b)$
es una factorización

Donde: $(x + a)$, $(x + b)$, son factores primos.

MÉTODO DE FACTORIZACIÓN

Factor Común Monomio
Consiste en extraer la parte que se repite en todos los términos para lo cual se extrae la expresión repetida, elevada a su menor exponente.

Ejemplo: Factorizar $E = 7x^5y^5 - 2x^3y^3 + x^2y^2$

El factor común monomio será x^2y^2. Ahora dividiremos cada uno de los términos cada uno de los términos entre dicho factor común, para lo que queda en el polinomio. Luego de dicho proceso se tendrá:

$$E = \underbrace{x^2 y^2 (7x^3y^3 - 2xy + 1)}_{\text{Factores primos}}$$

Factor Común Polinomio
Se usa este método cuando el polinomio posee un factor común de 2 o más términos. Por lo general, se encuentra luego de agrupar términos y bajo los siguientes criterios:

De acuerdo al número de términos
Ejemplo: si el polinomio tiene 8 términos podemos agrupar de 2 en 2 o de 4 en 4.

De acuerdo a los coeficientes de los términos:
Ejemplo:
Factorizar
$E = x^{12} + x^8y^4 + x^4y^8 + y^{12}$

Como no hay factor común monomio podemos agrupar los 4 términos de 2 en 2 y en forma ordenada.

En cada uno de los tres grupos:
$$E = x^6(x^4 + y^4) + y^8(x^4 + y^4)$$

Factor Común Polinomio $(x^4 + y^4)$. Ahora dividamos cada agrupación entre el factor común polinomio.

$$E = \underbrace{(x^4 + y^4)}_{\text{Factor primo}}\underbrace{(x^8 + y^8)}_{\text{Factor primo}}$$

Los factores primos no se pueden descomponer en nuevos factores, tiene un único divisor que es sí mismo

Esta expresión tendrá 2 factores primos
Método de las Identidades
Aplicación de identidades notables para estructuras conocidas.

Recordemos los siguientes:

A) Trinomio Cuadrado Perfecto
$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$$

OBSERVACIÓN:
El trinomio o cuadrado perfecto es el desarrollo de un binomio al cuadrado, se caracteriza por porque el doble del producto de la raíz de dos de sus términos es igual al tercer término:

Todo trinomio cuadrado perfecto se transforma en binomio al cuadrado.

Ejemplo:

$$\underset{\downarrow}{\underset{4(x)^2}{16x^2}} + \underset{2(4x)^5y^3}{40xy^3} + \underset{(xy3)^2}{25y^6} = \underbrace{(4x + 5y^3)^2}_{\text{Binomio al cuadrado}}$$

Luego, es T.C.P.

B) Diferencia de Cuadrados

$$A^2 – B^2 = (A + B)(A – B)$$

Ejemplo:

Factorizar: $x^4 – 4b^2$

Resolución:
Se tiene: $(x^2)^2 – (2b)^2 = (x^2 + 2b)(x^2 – 2b)$

C) Suma o Diferencia de Cubos

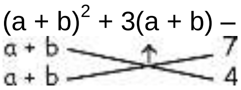
$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$$

Ejemplo:
Factorizar: $27x^3 – 8$

Resolución:
$(3x)^3 – 2^3 = (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$

ASPA SIMPLE
Se utiliza para factorizar expresiones trinomios o aquella que adopten esa forma: $Ax^{2m} + Bx^my^n + Cy2^n$

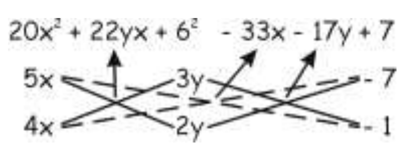
Ejemplos:
Factorizar: $a^2 + b^2 + 3a + 3b + 2ab - 28$
$(a + b)^2 + 3(a + b) – 28 \rightarrow (a + b + 7)(a + b – 4)$



ASPA DOBLE
Se utiliza para factorizar polinomios de la forma:
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$

Ejemplos:

1. Factorizar:



La expresión factorizada es:
$(5x + 3y – 7)(4x + 2y – 1)$

ASPA DOBLE ESPECIAL
Se utiliza para factorizar polinomios de la forma:

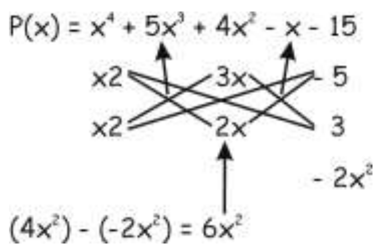
$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 Dx + E.$$

Regla:

1. Se descompone el término de mayor grado y el término independiente, se calcula la suma del producto en aspa.

2. A la suma obtenida se le agrega la expresión que haga falta para ver el término central. La expresión agregada es la que se descompone para comprobar los otros términos del polinomio

Ejemplo:
Factorizar



MÉTODO DE LOS DIVISORES BINOMIOS
Con éste método se busca uno o más factores binomios primos

Consideraciones:

1. Si $P(x_0) = 0$; entonces: $(x- x_0)$ es un factor primo de $P(x)$.

2. Los demás factores se encuentran al efectuar: $\frac{P(x)}{x - x_0}$

3. Los valores que anulan a P(x); se pueden encontrar:

$$\text{Posibles ceros} = x_0 \frac{Divisores\ T.indep.\ de\ P(x)}{Divisores\ Coef.\ Principal\ de\ P(x)}$$

Ejemplo:

Factorizar:
$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x – 6$

$$Posibles\ ceros = \pm \frac{Divisores\ 6}{Divisor\ de\ 1}$$

Posibles ceros = $\pm$ (1, 2, 3, 6)
Probando con uno de ellos; para x = 1 por Ruffini

	1	-6	11	-6
1	↓	1	-5	6
	1	-5	6	$\boxed{0}$

R = 0 lo que significa que x = 1 es un cero y luego un factor es (x . 1)

Luego: $P(x) = (x +1)(x^2 – 5x + 6)$
x –3
x –2

$\therefore P(x) = (x – 1)(x – 3)(x – 2)$

MÉTODO DE SUMAS Y RESTAS
Se inspecciona el dato, comparándolo con alguna identidad conocida, la mayoría de veces será necesario aumentar algunos términos para constituir en forma completa aquella identidad sugerida por el dato, naturalmente que aquellos

términos agregados deben ser quitados también para así no alterar el origen. Este método conduce la mayoría de las veces a una diferencia de cuadrados, suma de cubos o diferencia de cubos.

Ejemplo:
Factorizar:

$x^4 + 64y^4$

$\Rightarrow\ x^4 + 64y^4 + 16x^2y^2 - 16x^2y^2$
$x^4 + 16x^2y^2 + 64y^4 - 16x^2y^2$
$\therefore\ (x^2 + 8y^2)^2 - (4xy)^2$

Donde:
$(x^2 + 8y^2 + 4xy)\ (x^2 + 8y^2 - 4xy)$

M.C.D. – M.C.M. – FRACCIONES

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

El Máximo Común Divisor de 2 o más polinomios es otro polinomio que tiene la característica de estar contenido en cada uno de los polinomios. Se obtiene factorizando los polinomios y viene expresado por la multiplicación de factores primos comunes afectado de sus menores exponentes.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M.)

El Mínimo Común Múltiplo de 2 o más polinomios es otro polinomio que tiene la característica de contener a cada uno de los polinomios. Se obtiene factorizando los polinomios y viene expresado por la multiplicación de los factores primos comunes y no comunes afectados de sus mayores exponentes.

Ejemplo:

Hallar el M.C.D. y M.C.M. de los polinomios:
$A(x) = (x+3)^4\ (x^2+1)^6\ (x-2)^2\ (x+7)^6$
$B(x) = (x+7)^2\ (x^2+1)^3\ (x-2)^4\ (x+5)^8$
$C(x) = (x+5)^4\ (x^2+1)^2\ (x-2)^3\ (x+3)^3$

<u>Rpta</u>: como ya están factorizados el:
M.C.D. (A,B,C) = $(x^2+1)^2\ (x-2)$
M.C.M. (A,B,C) = $(x^2+1)^6\ (x-2)^4\ (x+3)^4\ (x+7)^6\ (x+5)^6$

<u>Propiedad</u>:
Solo para dos polinomios: A(x), B(x).
Se cumple: M.C.D. (A,B) . M.C.M. (A,B) = A(x) . B(x)

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Fracción Algebraica
Una fracción algebraica, se obtiene como la división indicada de dos polinomios N(x) y D(x) siendo D(x) polinomios no constante.

Denotado: $\dfrac{N(x)}{D(x)}$

Donde: N(x): polinomio numerador (no nulo).
D(x): polinomio denominador (no constante)

Ejemplo:
$\dfrac{x^2+1}{x-2};\ \dfrac{x^4+1}{x^7-2};\ \dfrac{x^2+2x+48}{x-4}$

Signos de una Fracción
a) Signo del Numerador: +
b) Signo del Denominador: –
c) Signo de la fracción propiamente dicha: –

$$F = -\frac{+x}{-y}$$

OBSERVACIÓN:
Si intercambiamos un par de signos por un mismo signo el valor de la fracción no se altera en el ejemplo anterior, es decir:
$$F = +\frac{+x}{+y} = -\frac{-x}{+y} = \frac{-x}{-y} = -\frac{+x}{-y}$$

También: $\dfrac{A}{-B} = -\dfrac{A}{B} = \dfrac{-A}{B}$

Ejemplo: Sumar: $x \neq 0$
$$S = \frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-x} = \frac{x}{x-y} - \frac{y}{(x-y)}$$
$$S = \frac{x-y}{x-y} = 1$$

Regla para Simplificar Fracciones
Debemos factorizar el numerador y denominador para luego eliminar los factores comunes:

Ejemplo:

Simplificar: $F = \dfrac{(x^2-9)(x-1)}{x^3-6x^2+11x-6}$

Resolución:

Factorizando y Simplificando:
$$F = \frac{(x+3)(x-3)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x+3}{x-2}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES

1. **Adición o Sustracción**
   Es preciso dar el Mínimo Común Múltiplo (MCM) de los denominadores. Se presentan los siguientes casos:

   A) Para fracciones homogéneas:
   Ejemplo:
   $$\frac{x}{x+2}-\frac{y}{x+2}+\frac{z}{x+2}=\frac{x+y+z}{x+2}$$

   B) Para fracciones heterogéneas:
   Ejemplo:
   $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bfc-bde}{bdf}$$

   C) Para 2 fracciones
   Regla practica:
   $$\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{wz+yz}{yw}$$

2. **Multiplicación**
   En este caso se multiplican los numeradores entre sí y lo mismo se hace con los denominadores. Debe tenerse en cuenta que antes de efectuar la operación puede simplificarse cualquier numerador con cualquier denominador (siempre que sean iguales).

   Ejemplo:
   $$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}.\frac{e}{f}=\frac{a.c.e.}{b.d.f}$$
   $$\frac{x}{x+1}.\frac{x+7}{x-2}.\frac{x-2}{x}.\frac{x+1}{x-7}=\frac{x+7}{x-7}$$

3. **División**
   En este caso, se invierte la segunda fracción y luego se efectúa como una multiplicación. También se puede aplicar el producto de extremos entre el producto de medios.

   Ejemplo:
   $$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c} \quad \text{... invirtiendo} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

Fracción Independiente
$$F(x,y)=\frac{ax^2+bxy+cy^2}{a_1x^2+b_1xy+c_1y^2}$$

Es independiente de x e y-
$$\Rightarrow \quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k$$
k $\rightarrow$ cte.