Curso: Aritmética **TEMA 03**

CUATRO OPERACIONES

ADICIÓN
Operación binaria, cuyo objeto es reunir varias cantidades homogéneas (de una misma especie), en una sola llamada suma total.

Adición en Otros Sistemas de Numeración

Ejemplo:
Calcular: $123_{(5)} + 244_{(5)} + 104_{(5)} + 131_{(5)}$

Resolución:
Colocando verticalmente los sumandos, considerando el orden (como el sistema decimal eran las unidades, decenas, ... etc)

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & 2 & 2 & & \\
 & 1 & 2 & 3_{(5)} & + \\
 & 2 & 4 & 4_{(5)} & \\
 & 1 & 0 & 4_{(5)} & \\
 & 1 & 3 & 1_{(5)} & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 2_{(5)} &
\end{array}
$$

En la 1era. Columna:
3 + 4 + 4 + 1= 12
Ahora: ¿12, cuántas veces contiene la base?
Rpta: $12 = \underbrace{2}_{\text{se lleva}}(5) + \underbrace{2}_{\text{queda}}$

2da columna
2 + 2 + 4 + 0 + 3 = 11
Lo que se llevó (2)
Ahora: ¿11, cuántas veces contiene a la base 5?
$11 = \underbrace{2}_{\text{se lleva}}(5) + \underbrace{1}_{\text{queda}}$

3era. columna
2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 7
Lo que se llevó: (2)
Ahora: ¿7, cuántas veces contiene a la base 5?
Rpta. $7 = \underbrace{1}_{\text{se lleva}}(5) + \underbrace{2}_{\text{queda}}$

$123_{(5)} + 244_{(5)} + 104_{(5)} + 131_{(5)} = 1212_{(5)}$

SUSTRACCIÓN
Operación inversa a la adición, consiste en que dada 2 cantidades llamadas minuendo y sustraendo, hallar una cantidad llamada sustraendo.

Ejemplo:
$$\underbrace{8}_{\text{Minuendo}} - \underbrace{5}_{\text{Sustraendo}} = \underbrace{3}_{\text{Diferencia}}$$

Ejemplo: Calcular: 237 – 128

Resolución:

> **OJO**:
> En base 10, "1 unidades de una orden cualquiera es 10 unidades orden cualquiera es 10 unidades del orden inmediato inferior"

Sustracción en Otras Bases
Ejemplo ilustraciones:
Calcular: $432_{(5)} - 143_{(5)}$

Resolución
Recordando que en base 5, "1" unidades de orden cualquiera es 5 unidades del orden del orden inmediato inferior.

$$
\begin{array}{rrrl}
4 & 3 & 2_{(5)} & - \\
1 & 4 & 3_{(5)} & \\
\hline
2 & 3 & 4_{(5)} &
\end{array}
$$

Explicación
- **1ra Columna:**
  Como a "2" no se lee puede ser restar 3, entonces lo que se hace es prestar una base a "2", es decir:
  5 + 2 = 7
  → 7 – 3 = 4 → queda.
- **2da Columna:**
  Como se presto una base del 3, ahora será: luego le prestaremos al 2 una base, es decir:
  5 + 2 = 7
  → 7 – 4 = 3 → queda.

- **3ra Columna:**
  Como se prestó una base de 4, entonces ahora será: 4 – 3 , y a este "3" si le puede restar 1, con lo que necesario prestarle una base.

$$\rightarrow 3 - 1 = \underbrace{2}_{\text{queda.}}$$

$$\therefore\ 432_{(5)} - 143_{(5)} = 234_{(5)}$$

Otros ejemplos:

$$\begin{array}{r} 5\ 1\ 3_{(8)}\ - \\ 3\ 1\ 5_{(8)} \\ \hline 1\ 7\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\ 2\ 3\ 1_{(7)}\ - \\ 3\ 6\ 5\ 4_{(7)} \\ \hline 2\ 2\ 4\ 4_{(7)} \end{array}$$

Propiedades:

I) **Dado:**

$$\begin{array}{l} \overline{a\,b\,c}_{(c)} - \\ \overline{c\,b\,a}_{(n)} \\ \hline \overline{x\,y\,z}_{(n)} \end{array} \quad \begin{cases} \text{Si } a > c, \text{ entonces} \\ 1)\ \ y = n - 1 \\ 2)\ \ x + z = n - 1 \end{cases}$$

II) **En Base 10:**

$$\begin{array}{l} \overline{a\,b\,c} - \\ \overline{c\,b\,a} \\ \hline \overline{x\,y\,z} \end{array} \quad \begin{cases} \text{Si } a > c, \text{ entonces} \\ 1)\ \ y = 9 \\ 2)\ \ x + z = 9 \end{cases}$$

Ejemplo: Si: $\overline{a\,b\,c} - \overline{c\,b\,a} = \overline{m\,n\,7}$

Calcular: $m^2 + n^2$

Resolución:
Aplicando directamente la propiedad, se tendrá que:
I) n = 9
II) m + 7 = 9 → m = 2
Piden $2^2 + 9^2 = 85$

Complemento Aritmético CA(N)
Es lo que falta a u número "N", para ser igual a la unidad de orden inmediato superior, es decir lo que le falta para ser igual a un número formado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene "N"

Ejemplo:
- CA (7) = 10^1 – 7 = 10 - 7 = 3
- CA (341) = 10^3 – 341 = 1000 – 341 = 659

En general: Sea "N" número de "k" cifras, luego:
C A (N) = 10^K – N

Forma Práctica:
A la primera cifra (diferente de cero) o menor orden se le resta de 10 y a todas las restantes se restan de 9. si hay ceros en las menores ordenes estos permanecen en el complemento, es decir:

$$C\,A = \left(\overline{abcd}\right) = \overline{(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)}$$

Ejemplos:

CA (3 4 7) = 6 5 3
9 - 4
10 - 7
9 - 3

$CA\,(\underbrace{3\ 6\ 3\ 4\ 2}_{\text{restar de 9}}\ \underbrace{3}_{\text{Restar de 10}}) = 636577$

$CA\,(\underbrace{3}_{\text{Restar de 8}}\ \underbrace{7}_{\text{Restar de 10}}\ 0\ 0) = 6\ 3\ 0\ 0$

Complementos Aritméticos en Otras Bases

- C A($34_{(7)}$) = 72 – $34_{(7)}$
- C A ($429_{(11)}$) = 11^3 – $429_{(11)}$
- C A ($7251_{(8)}$) = 8^4 – $7251_{(8)}$

Método Práctico:

$$CA\,(\underbrace{3\ 2\ 5}_{\text{Resta cada cifra de 7}}\ \underbrace{1}_{\text{Resta de 8}}{}_{(8)}) = 4\ 5\ 2\ 7_{(8)}$$

En General: C A ($N_{(B)}$) = $10^K_{(B)} - N_{(B)}$
K: números de cifras de "N"

Forma práctica para Calcular el CA en Otras Bases
A partir del menor orden se observa la primera cifra significativa, la cuál va a disminuir a la base y las demás cifras disminuyen a la base menos 1.

Ejemplos:
- $CA\,(\underbrace{2}_{\text{Resta cada cifra de 8}}\ \underbrace{1}_{}\ \underbrace{8}_{\text{Resta de 9}}{}_{(9)}) = 6\ 7\ 1_{(9)}$
- $CA\,(\underbrace{1\ 5}_{\text{Resta cada cifra de 12}}\ \underbrace{6}_{\text{Resta de 13}}\ 7\ 0\ 0\ 0_{(13)}) = (11)\ 7\ 6\ 6\ 0\ 0\ 0_{(13)}$

MULTIPLICACIÓN
Es una operación binaria, donde dados dos elementos M y m llamados multiplicando y multiplicador se le hace corresponder un tercer elemento P llamado producto.

Origen: $\underbrace{M + M + M + \ldots\ldots + M}_{m\ veces} = P$

$\boxed{M \,.\, m = P}$

Donde: $\left.\begin{array}{l} M: \text{multiplicando} \\ m: \text{multiplicador} \end{array}\right\}$ factor
P: producto

<u>**Notas**</u>:
01. Si se multiplica:

$$\begin{array}{r} 2\,43\ \text{x} \\ 65 \\ \hline 1215 \\ 1458\ \ \\ \hline 15795 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow \text{1er producto parcial} \\ \rightarrow \text{2do producto parcial} \\ \rightarrow \text{Producto Total} \end{array}$$

02. Si: $\overline{abc}$. 7 = ... 6 → c = 8

03. Si: $\overline{abc}$. 4 = ... 2 → c = $\begin{cases} 3 \\ 8 \end{cases}$

04. Se cumple: (# impar) (.... 5) = ... 5
(# par) (... 5) = ...0

05. Se cumple:

$$n(n+1) = \begin{cases} \ldots\ldots\ 0 \\ \ldots\ldots\ 2 \\ \ldots\ldots\ 6 \end{cases}$$

DIVISIÓN

Es una operación binaria que consiste en que dados dos enteros, el primero llamado dividendo y el segundo llamado divisor, encontrar un tercero llamado cociente.

$$\boxed{D \div d = q} \quad D = d \, . \, q$$

D : dividendo

d : divisor; $d \neq 0$

q : cociente

División Entera:

Es un caso particular de la división en la que el dividendo, divisor y cociente son número enteros; en este caso se recurre a un cuarto términos llamado residuo.

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \qquad r : \textbf{residuo}$$

puede ser:

1. **Exacta** (residuo = 0)
   Ejemplo:
   $$\begin{array}{l|l} 45 & 9 \\ \hline 0 & 5 \end{array} \rightarrow \; = 9(5)$$

   En general
   $$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline 0 & q \end{array} \rightarrow \boxed{D = dq}$$

2. **Inexacta** (residuo > 0)

   a) Por defecto
   Ejemplo:
   $$\begin{array}{l|l} 67 & 9 \\ \hline 4 & 7 \end{array} \rightarrow 67 = 9(7) + 4$$

En general
$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \rightarrow \quad D = dq + r \quad d \in Z$$

Donde: $0 < r < d$

q : cociente por defecto

r : residuo por defecto

b) Por exceso
Ejemplo:
$$\begin{array}{l|l} 67 & 9 \\ \hline 5 & 8 \end{array} \rightarrow \quad 67 = 9(8) - 5$$

En general:
$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline R_e & q_e \end{array} \rightarrow \quad D = dq_e - r_e \quad d \in Z^+$$

Donde: $0 < r_e < d$

q_e : cociente por exceso

r_e : residuo por exceso

Propiedades de la división inexacta

1. $q_e = q + 1$
2. $r_{min} = d - 1$
3. $r + r_e = d$

Alteración de la división por multiplicación

Ejemplo:
$$\begin{array}{l|l} 67 & 9 \\ \hline 4 & 7 \end{array} \xrightarrow[d \times 3]{D \times 3} \begin{array}{l|l} 201 & 27 \\ \hline 12 & 7 \end{array}$$

x 3

En general

Si:
$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \rightarrow \begin{array}{l|l} Dn & dn \\ \hline rn & q \end{array}$$