ACADEMIA PRE UNIVERSITARIA
PREMIUM
¡La clave para tu ingreso!
R.D.R. 9484

Curso: Aritmética

Ciclo Invierno 2020
TEMA N° 09

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

POTENCIACIÓN (N^K):

Es una operación directa en la cual un número (potencia perfecta) real positivo, resulta la multiplicación de otro número real por si mismo, un número entero de veces.

Forma general: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{"K" veces}} = a^k <> P$

Donde:

* $\underline{a}$ = base ($a \in R$)
* $\underline{k}$ = exponente, indica el número de veces que "a" se multiplicó por sí mismo. ($K \in R$)
* $\underline{p}$ = Potencia ($P \in R$)

Propiedad Fundamental:

a^k es potencia perfecta de "k" si:

$$\begin{cases} a = m^{\alpha} \cdot n^{\beta} \cdot p^{\gamma} \cdot ... \cdot 1^{\Omega} \\ a^k = m^{\alpha k} \cdot n^{\beta k} \cdot p^{\gamma k} \cdot ... \cdot 1^{\Omega k} \end{cases}$$

Donde: $\begin{cases} m; n; ...1 = \text{factores primos de } "\alpha" \\ \alpha; \beta; ...\Omega = \text{divisores de } "K" \end{cases}$

1) Cuadrado Perfecto o Potencia Perfecta de base 2 ($N = P^{2k}$)

Es aquel número que posee raíz cuadrada exacta y que posee un número impar de divisores.

* **Modos de inclusión del cuadrado perfecto:**

1) Todo número será cuadrado perfecto si y solo sí todos sus factores primos presentan exponentes múltiplos de 2.
Ejm: $144 = 2^4 \cdot 3^2 \quad \overline{2} \Rightarrow 144 = P^{2k}$

2) Todo número será cuadrado perfecto si y solo sí dicho número es múltiplo de 4 (PAR) ó $\overset{0}{4}+1$ (IMPAR). Ejm.: $100 = 10^2 \wedge 100 = \overset{0}{4}$ (PAR)

3) Todo número será cuadrado perfecto si termina en un número par de ceros y el numeral formado por las cifras distintas de ceros es cuadrado perfecto. Ejm: $900 = P^{2k} \Leftrightarrow 9 = P^{2k} = 3^2$

4) En todo número cuadrado perfecto se cumple:

Si $N = P^{2k} \Rightarrow N = \overset{0}{8}+1$ (solo en impares)

$N = \overset{0}{9}+1; \overset{0}{9}+4; \overset{0}{9}+7; \overset{0}{9}$ (solo uno de ellos)

5) Si $N = P^{2k} \Rightarrow (\wedge)\ k = \overline{...cds}$, se cumple:

Si $N = \overline{...cds} \Rightarrow d = 2;\ c = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 6 \end{cases}$ (solo uno de ellos). Ejm: $625 = 25^2$

6) Si un número termina en 1; 4; 5; 6; ó 9; entonces puede ser un número cuadrado perfecto.

* **Modos de exclusión del cuadrado perfecto:**

1) Todo número que termina en 2; 3; 7 ó 8 nunca es cuadrado perfecto.
2) Todo número que termina en un número impar de ceros no es cuadrado perfecto.
3) Todo número que excluye al cuadrado perfecto de un factor primo, no es cuadrado perfecto.
4) Todo número que no cumpla con la prioridad fundamental de la potenciación no será cuadrado perfecto.

* **Conclusión:** Todo número que es cuadrado perfecto cumple con todos los modos de inclusión y con la propiedad fundamental de potenciación.

2) Cubo Perfecto o Potencia Perfecta de Grado o base 3 ($N = P^{3k}$)

Es aquel número que posee raíz cúbica exacta.

- **Modos de Inclusión del Cubo Perfecto:**
  1) Todo cubo perfecto termina en cualquier cifra.
  2) Todo cubo perfecto presenta todo factor primo elevado a exponentes múltiplos de 3.

3) Todo número que termina en cero es perfecto si y solo sí posee cantidad de ceros múltiplos de 3 y el número formado por las cifras distintas a cero es cubo perfecto.

4) Todo cubo perfecto cumple:

$$\forall\, P^{3k} = \overset{0}{4}; \overset{0}{4}+1 \text{ ó } \overset{0}{4}-1$$
$$= \overset{0}{9}; \overset{0}{9}+1 \text{ ó } \overset{0}{9}-1$$
$$= \overset{0}{8} \text{ (solo pares)}$$

5) Si todo cubo perfecto termina en S:

$N = \ldots \overline{cds} \Rightarrow$ d = 2 ó 7
c = 3; 6; 8 ó 1

- **Modos de exclusión del cubo perfecto:**
  1) Un número no es cubo perfecto si no cumple con, al menos, uno de los modos de inclusión.
  2) Un número no es cubo perfecto si no contiene al cubo de su factor primo.

RADICACIÓN $\left(\sqrt[k]{n}\right)$

Es la operación inversa a la potenciación, en la cual el índice de la raíz equivale al exponente, la raíz equivale a la base y el radicando a la potencia.
Forma general:

$$\sqrt[K]{n} = R \Leftrightarrow R^K = n\ ;$$

Donde: K = Índice ($K \in Q^+ > 1$)
n = Radicando o Cantidad Subradical ($n \in R^+$)
R = Raíz ($R \in R^+$)

OBS:
Solo esta definida la radicación de índice entero positiva.

Propiedades:

1) Monotonía:

$$\text{Si } a > b \Rightarrow \sqrt[k]{a} > \sqrt[K]{b} (\wedge) \text{ Si } a < b \Rightarrow \sqrt[K]{a} < \sqrt[K]{b}$$

2) De uniformidad:

$$\exists\, !R / R = \sqrt[k]{n}\ (\wedge) \text{ Si } K = m;\ a = b \Rightarrow \sqrt[K]{a} = \sqrt[m]{b}$$

3) Distributiva:

$$\sqrt[k]{a^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}...1^{\Omega}} = \sqrt[k]{a^{\alpha}} \cdot \sqrt[k]{B^{\beta}} \cdot \sqrt[k]{C^{\gamma}} \cdot \sqrt[k]{1^{\Omega}}\ ;\ \sqrt[k]{\frac{a^{\alpha}}{B^{\beta}}} = \frac{\sqrt[k]{a^{\alpha}}}{\sqrt[k]{B^{\beta}}}$$

Ley de signos:

(*) $\sqrt[PAR]{(+)} = (\pm)$

(*) $\sqrt[IMPAR]{(-)} = (-)$

(*) $\sqrt[IMPAR]{(+)} = (+)$

(*) $\sqrt[PAR]{(-)} = \exists\} \in C$

Raíz Cuadrada:

Forma general: $\sqrt{n} = R \Rightarrow n = R^2$

1.1. Raíz Cuadrada exacta:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{n} & R \\ 0 & \end{array} \Rightarrow \quad n = R^2$$

1.2. Raíz cuadrada inexacta:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{n} & R \\ r & \end{array} \Rightarrow n = R^2 + r$$

1.3. Por Exceso:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{n} & R' \\ r' & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} n = (R')^2 - r' \\ n = (R+1')^2 - r' \end{array}$$

Raíz Cúbica:

Forma general: $\sqrt[3]{n} = R \Rightarrow n = R^3$

Raíz cúbica exacta:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{n} & R \\ 0 & \end{array} \Rightarrow n = R^3$$

Raíz cúbica inexacta:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{n} & R \\ r & \end{array} \Rightarrow n = R^3 + r$$

Por exceso

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{n} & R' \\ r' & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} n = (R')^3 - r \\ n = (R+1)^3 - r' \end{array}$$

Donde:
n = Radicando
R^I = Raíz por exceso
R = Raíz (por defecto)
r = Resto o residuo (por defecto)
r ' = Resto o residuo por exceso

Propiedades:

1) **Para Raíz Cuadrada:**
   (*) $r + r^I = 2R + 1$
   (*) En raíz inexacta:

$$\left.\begin{array}{l} r_{min} = 1 \\ r_{max} = 2R \end{array}\right\} r < 2R + 1$$

2) **Para Raíz Cúbica:**
   (*) $r + r^I = 3R(R + 1) + 1$

   (*) **En raíz inexacta:**

$$\left.\begin{array}{l} r_{min} = 1 \\ r_{max} = 3R(R+1) \end{array}\right\} r < 3R(R+1) + 1$$