Curso: Álgebra

Ciclo Invierno 2020
TEMA N° 10

INECUACIONES

Definición: Es una desigualdad.

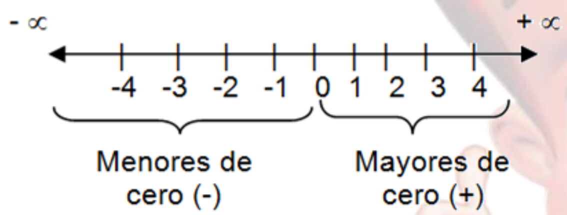
Desigualdad: Es una relación que nos indica que una cantidad o expresión es mayor o menor que otra. Estos se establecen solo en el campo de los números reales.

Signos: (Sirven para designar a las desigualdades)

- $\neq \rightarrow$ diferente a
- $> \rightarrow$ mayor que
- $< \rightarrow$ menor que

También:

- $\geq \rightarrow$ mayor o igual que
- $\leq \rightarrow$ menor o igual que



$\rightarrow$ Si a es (+) $\leftrightarrow$ $a > 0$
$\rightarrow$ Si a es (-) $\leftrightarrow$ $a < 0$

Definiciones:

1. Se dice que una cantidad "a" es mayor que otra cantidad "b", si la diferencia (a – b) es una cantidad positiva, es decir:

   $$a > b \text{ si } a - b > 0$$

   Ejm: $-2 > -7 \rightarrow$ porque $-2 - (-7) = 5$, es (+)

2. En caso contrario:
   Si: $a < b$
   $a - b < 0$
   Ejm: $-3 < -1 \rightarrow -3 - (-1) = -2$, es (-)

3. Si: $a > b \wedge c < d$ son desigualdades de sentido contrario.

Propiedades de las Desigualdades

1. Sea: $a > b$
   Si se le suma o resta: c
   $a \pm c > b \pm c$ (NO VARIA)

2. Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por la misma cantidad, el sentido de la desigualdad NO VARIA.

   Si: $a > b \rightarrow$ y $c > 0$
   $$\begin{cases} ac > bc \\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

3. Si $a > b \wedge c < 0$
   Cumple:
   $$\left.\begin{matrix} ac < bc \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \end{matrix}\right\}\text{se invierte}$$

4. Si $a > b \wedge b > c$
   $\rightarrow a > b > c \rightarrow a > c$

5. Si $a > b \wedge c > d$
   $\rightarrow$
   Se cumple: $a + c > b + d$

6. Si $a > b \wedge c < d$
   Se cumple: $a - c > c - d$

7. Si $a > b \wedge c > d \Rightarrow b > 0 \wedge d > 0$
   Se cumple: $ac > bd$
   Consecuencias: Si $a > b$ siendo $b > 0$
   $\rightarrow a^n > b^n$
   $+\sqrt[n]{a} > +\sqrt[n]{b}$

8. Si: $a > b \wedge c < d$ siendo $b > 0 \wedge c > 0$
   Se cumple: $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}$

CLASES DE DESIGUALDADES:

1. **Desigualdad condicional o inecuaciones:** Son aquellos que verifican solo para determinados valores o sistemas de valores atribuido a sus incógnitas y para los cuales están definidos sus miembros.

   Ejm: $3x - 2 > 13$
   $x > 5$

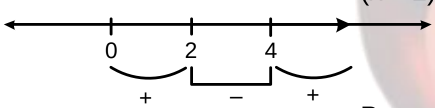
2. **Desigualdad Incondicional:** Toman cualquier valor o sistemas de valores.

   Ejm: $a^2 + 5 > 0$ "a" toma cualquier valor real.
   Solución: $a^2 > -5$
   Pero como $a^2 \geq 0 \wedge 0 > -5$
   $a^2 \geq -5$ es OBVIO

Clasificación de las Inecuaciones de acuerdo a sus soluciones:

1. **Inecuación Posible:**

   a. **Inecuación determinada:** Sea:
   $(x - 2)(x - 4) < 0$



   Porque $2 < x < 4$ (ya esta determinada)

   b. **Inecuación Indeterminada:** Sea $(x - 3)^2 + 1 > 0$, cuando satisface para cualquier valor de x.

2. **Inecuación Imposible o absurda:** Cuando carece de soluciones:

   Ejm: $X^2 < -2$ (es imposible)

   a. **Inecuación equivalente:** Cuando tiene las mismas soluciones.}
   Ejm:
   $3x - 5 > 2x + 1$
   $5x + 2 > 4(x + 2)$

Inecuaciones de Primer Grado con una incógnita

Una inecuación de primer grado con una incógnita es aquella que puede reducirse a la forma:

$ax + b > 0$ ó $ax + b < 0$

Si: $ax + b > 0$ $\quad x > -\dfrac{b}{a}$

Si: $ax + b < 0$ $\quad x < -\dfrac{b}{a}$

Si a = 0, la inecuación se reduce a: $b > 0$
$\Rightarrow$ Para todo valor de x; es positivo, lo cual se denomina ecuación indeterminada.

Inecuaciones de 2^do grado:

Toda inecuación de 2do grado puede reducirse siempre a: $ax^2 + bx + c \geq \leq 0$; $\quad a \neq 0$

El conjunto solución: $\{x \in R \,/\, ax^2 + bx + c \geq \leq 0\}$ y dependerá de la naturaleza del discriminante.
$\Delta = b^2 - 4ac$

Luego:

Caso 1: Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0 = > ax^2 + bx + c$, tiene dos raíces reales diferentes, por ejemplo x_1, x_2, con $x_1 < x_2$ entonces.
$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$

1.1) $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow a(x - X_1)(x - x_2) > 0$
   a) Si $a > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, x_1\rangle \cup \langle x_2, \infty\rangle$
   b) Si $a < 0 \Rightarrow x \in \langle x_1, x_2\rangle$

1.2) $Ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) < 0$
   a) Si $a > 0 \Rightarrow x \in \langle x_1, x_2\rangle$
   b) Si $a < 0 \Rightarrow a(x - x_1)(x - x_2) > 0$

Caso 2: Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c$, tiene dos raíces iguales, es decir: $x_1 = x_2$, luego:

Sea: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

2.1 $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)^2 > 0$
   a) Si $a > 0 \Rightarrow x \in R - \{x_1\}$
   b) Si $a < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$

2.2 $Ax^2 + bx + c < 0. \Leftrightarrow a(x - x_1)^2 < 0$
   a) Si $a > 0 \Rightarrow x \in \varnothing$
   b) Si $a < 0 \Rightarrow x \in R - \{x_1\}$

Caso 3: Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c$, no tiene raíces reales:

3.1 Si $a > 0$
$\Rightarrow ax^2 + bx + c > 0$, $\quad \forall x \in R$

3.2. Si $a < 0$
$\Rightarrow ax^2 + bx + c < 0$, $\quad \forall x \in R$

VALOR ABSOLUTO

Definición:
El valor absoluto de un número real "a" se denota por |a| y se define: $|a| = \begin{cases} a & Si\ \ a \geq 0 \\ -a & Si\ \ a < 0 \end{cases}$

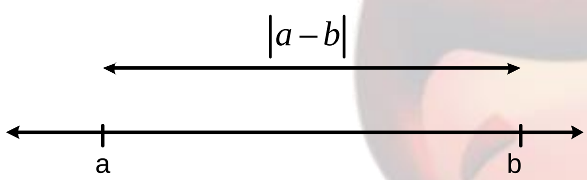
Ejm: |2| = 2 : $|-\sqrt{5}| = -(-\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

- Si

$$|3x-1| = \begin{cases} 3x-1\ ,\ si\ 3x-1 \geq 0 \\ -(3x-1),\ si\ 3x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x-1\ ,\ Si\ x \geq 1/3 \\ 1-3x\ ,\ si\ x < 1/3 \end{cases}$$

Interpretación geométrica:

- Geométricamente el valor absoluto de la diferencia de dos números a y b denotado |a – b| es la distancia que hay ente ellos en la recta numérica:



Teorema:

- ∀ valor de a: |a| ≥ 0

Se cumple:
- Si a = 0 entonces |a| = |0| = 0
- |a| = |-a|
- a ≤ |a|
- -a ≤ |a|

Supóngase: que a ≥ 0 ∧ b ≥ 0 entonces:
$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$
- $|a|\ |b| = |ab|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\ ,\ b \neq 0$
- $|a^n| = |a|^n$, n entero

Desigualdad Triangular:
Dada por: |a + b| ≤ |a| + |b|
Demostración:
i) a ≤ |a| y b ≤ |b| ⇒ |a| + |b| ≥ a + b
ii) -a ≤ |a| y –b ≤ |b| ⇒ -(a + b) ≤ |a| + |b| ó
|a| + |b| ≥ -(a + b)
De donde: |a + b| < |a| + |b|

Ecuaciones con Valor Absoluto:
El siguiente teorema es utilizado en la solución de ecuaciones con valor absoluto:

Teorema:
Este teorema establece que el universo U (es decir el campo de valores admisibles) de la ecuación |a| = b esta determinado por la condición b ≥ 0; la cual debe ser resuelta previamente una vez hallado este universo U se pasa a resolver las dos ecuaciones a = b y a = -b_1 finalmente se comprueba si estas soluciones se hallan dentro del universo U.

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Sabemos: $|a| = \begin{cases} a & ,\ \ a \geq 0 \\ -a\ , & a < 0 \end{cases}$

- *La solución de inecuaciones con Valor absoluta se basa en los siguientes teoremas:*
- *Sean x a ∈ R entonces:*
  - *Si |x| ≤ a ⇔ [a ≥ 0 ∧ -a ≤ x ≤ a]*
  - *Si |x| < a ⇔ [a > 0 ∧ -a < x < a]*
  - *Si |x| ≥ a ⇔ [a ≥ 0 ∨ x ≤ -a]*
  - *Si |x| > a ⇔ [a > 0 ∨ x ≤ -a]*

Teorema: Dados a,b ∈ R:

1. *|a| ≤ |b| ⇔ (a + b) (a - b) ≤ 0*
2. *|a| < |b| ⇔ (a + b) (a – b) < 0*
3. *|a| ≥ |b| ⇔ (a + b) (a – b) ≥ 0*

Ejm: Resolver: |2x – 3| ≤ 1

|2x – 3| ≤ 1 ⇔ [1 ≥ 0 ∧ -1 ≤ 2x – 3 ≤ 2]

⇔ [1 ≥ 0 ∧ 1 ≤ x ≤ 2]

⇔ 1 ≤ x ≤ 2

∴ C.S. → [-1 , 2]

- *Si |x| < a , donde a > 0*

De donde viene:

a) Si x ≥ 0 entonces |x| = x → x < a
b) Si x < 0 entonces |x| = -x → -x < a ó -a < x
∴|x| < a → se cumple que: -a < x < a

se cumple lo mismo para |x| ≤ a , donde a ≥ 0