Curso: Razonamiento Matemático

Ciclo Invierno 2020
TEMA N° 10

FACTORIALES Y ANÁLISIS COMBINATORIO

Factorial de un Número Natural

Es el producto de todos los números consecutivos desde la unidad hasta el número que nos dan inclusive:

Representación del Factorial de un número:
Si el número es "n"; su factorial se representa por:

$n!$ $\lfloor\underline{n}$ $\underline{n}\rfloor$	$\Rightarrow$	Se lee factorial del número "n" o "n" factorial.

Por definición:

$\boxed{\lfloor\underline{n} = n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times n}$

$\boxed{\lfloor\underline{n} = n! = n(n-1)(n-2)(n-3) ... \times 2 \times 1}$

Ejemplos:

$4! = \lfloor\underline{4} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$5! = \lfloor\underline{5} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$6! = \lfloor\underline{6} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

Nota importante:
Los factoriales mayores que 5 o igual que 5; siempre terminarán en cero.

Propiedades de los factoriales:

1) Solamente existe factoriales para números enteros y positivos.

   Es decir: Si: $\boxed{\lfloor\underline{n} = n!}$

   Donde: n = Entero y Positivo

2) Por axioma de las matemáticas, se define que:

   $\boxed{\lfloor\underline{0} = 1}$ y $\boxed{\lfloor\underline{1} = 1}$

3) El factorial de un número puede ser siempre descompuesto como el producto del factorial de otro número menor que él por todos los números consecutivos a este último; hasta completar dicho número.

   Así:

   $\lfloor\underline{7} = 7! = 4! \times 5 \times 6 \times 7$

   $\lfloor\underline{9} = 9! = 6! \times 7 \times 8 \times 9$

   $\lfloor\underline{6} = 6! = 2! \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

   $\lfloor\underline{n+5} = (n+5)! = (n+1)!(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$

   $\lfloor\underline{n-2} = (n-2)! = (n-4)!\,(n-3)(n-2)$

4) En factoriales, las siguientes operaciones no se cumplen:

   a) $\lfloor\underline{n+m} \neq \lfloor\underline{n} + \lfloor\underline{m}$

   b) $\lfloor\underline{n-m} \neq \lfloor\underline{n} - \lfloor\underline{m}$

   c) $\lfloor\underline{\dfrac{m}{n}} \neq \dfrac{\lfloor\underline{m}}{\lfloor\underline{n}}$

Cofactorial o semifactorial de un número:

Símbolo: n!!

- ✓ $6!! = 6 \times 4 \times 2 = 48$
- ✓ $7!! = 7 \times 5 \times 3 \times 1 = 105$
- ✓ $8!! = 8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$
- ✓ $9!! = 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1 = 945$

Análisis Combinatorio

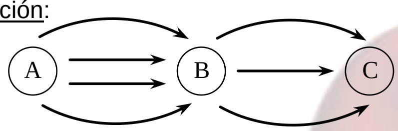
A) Principio de Multiplicación

Si el suceso "A" se puede realizar de "m" maneras y el suceso "B" se puede realizar de "n" maneras, entonces los sucesos "A" y "B" se pueden realizar en forma conjunta de: **m** × **n** maneras siempre que se efectúe uno después del otro.

Nota : Este principio se puede generalizar para más de dos sucesos.

Ejemplo:
De una ciudad "A" a otra ciudad "B" hay 4 caminos diferentes y de la ciudad "B" a la ciudad "C" hay 3 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá ir de "A" a "C"?

Resolución:



Hay 4 maneras de ir de A a B — Hay 3 maneras de ir de B a C

Luego, el número de maneras de ir de "A" a "C" son:

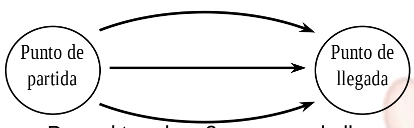
$\boxed{\text{\# de maneras} = 4 \times 3 = 12}$

B) Principio de Adición
Si el suceso "A" puede realizarse de "m" maneras y el suceso "B" de "n" maneras, entonces el suceso "A" o el suceso "B" se puede realizar "(m + n)" maneras.

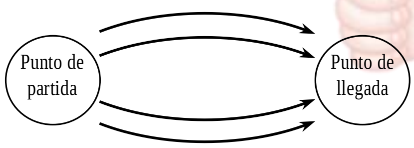
Nota : Para que se cumpla el principio de adición, se debe verificar que no sea posible que los sucesos A y B ocurran juntos.

Ejemplo:
Proyectamos un viaje y decidimos ir en tren o en microbús, si hay 3 rutas para el tren y 4 para el ómnibus. ¿Cuántas maneras tenemos para decidir nuestro viaje?

Resolución:



Para el tren hay 3 maneras de llegar



Para el microbús hay 4 maneras de llegar

$\boxed{\text{\# de maneras} = 3 + 4 = 7}$

VARIACIONES O ARREGLOS

Variación es cada una de las ordenaciones que pueden formarse con varios elementos, tomados de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres, de modo que dos ordenaciones cualquiera, del mismo número de elementos se diferencien por lo menos, en un elemento o por el orden en que están colocados.

Ejemplo:
Dado : A = {a, b, c}
3 elementos

Las variaciones serían: Si tomamos de 2 en 2
$\therefore$ $\boxed{n = 2}$ se tiene:

Si nos interesa el orden ya que no es lo mismo ab que ba ⇒ {ab, ac, bc, ba, ca, cb}

Si tomamos de 3 en 3
$\therefore$ $\boxed{n = 3}$ se tiene:
{abc, acb, bac, bca, cab, cba}

NÚMERO DE VARIACIONES

Siendo: (m > n > 0) $\boxed{V_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)!}}$

Donde: m = # total de elementos.
De los "m" elementos tomamos de "n" en "n".

Ejemplos:

$$V_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 5 \times 6 \times 7 = 210$$

$$V_m^m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} = \frac{m!}{1} = m!$$

Nota : Para las variaciones el orden de sus elementos si interesa, ya que no es lo mismo decir: 23 que 32, como se observará estos dos números están compuestos por las mismas cifras, pero en su valor son diferentes.

PERMUTACIONES

Se llama permutaciones a las variaciones en las que entran todos los elementos en sus diversas ordenaciones, de modo que dos grupos cualesquiera contienen los mismos elementos y solamente difieren en el orden que están colocados.
Sean los elementos: a, b, c

Permutaciones de 3 elementos:

$\boxed{\text{abc, acb, bca, bac, cba, cab}}$

Permutaciones, son aquellas variaciones de tipo:

V_n^m En donde: $\boxed{m = n}$

$$P_n = V_n^n = n!$$

$$\therefore \boxed{P_n = n!}$$

Ejemplo: ¿De cuántas maneras pueden sentarse 4 personas en 4 asientos uno a continuación de otro?

Por fórmula : $\boxed{P_n = n!}$
Donde : n = 4
Luego: $\boxed{P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24}$

Permutaciones con repetición

$$\boxed{P_m^{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k} = \frac{m!}{m_1! \times m_2! \times m_3! \times \ldots \times m_k!}}$$

En donde:
m : # total de elementos
m_1 : Grupo de elementos iguales entre sí
m_2 : Grupo de elementos iguales entre sí
m_3 : Grupo de elementos iguales entre sí.
⋮
m_k : Grupo de elementos iguales entre sí

Ejemplo: ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden tomar con las letras de las palabras NONOM?

Resolución: Por fórmula: $\boxed{P_n^{m_1 . m_2} = \dfrac{m!}{m_1! \times m_2!}}$

Donde:

$\begin{cases} m = 5 & \text{(\# total de elementos)} \\ m_1 = 2 & \text{(la letra “N” se repite dos veces)} \\ m_2 = 2 & \text{(la letra “O” se repite dos veces)} \end{cases}$

Luego:

$$p_5^{2.2} = \frac{5!}{2! \times 2!} = \frac{3 \times 4 \times 5}{2!}$$

$$p_5^{2.2} = \frac{3 \times 4 \times 5}{2!} = \boxed{\text{30 palabras}}$$

Permutaciones Circulares

Cuando “m” elementos se disponen alrededor de un círculo, el número de permutaciones es (n–1)! si se cuenta siempre en el mismo sentido a partir de un mismo elemento.

$$\boxed{P_{n-1} = (n-1)!}$$

Ejemplo: ¿De cuántas maneras pueden sentarse 6 personas alrededor de una mesa redonda?

Resolución:
Por fórmula: $\boxed{P_{n-1} = (n-1)!}$

Donde: n = 6
Luego: $\boxed{P_{6-1} = (6-1)! = 5! = 120}$

Permutaciones con lugares fijos

Si se establece que determinados elementos han de ocupar lugares fijos, el número de agrupaciones será el que se puede formar con los demás elementos.

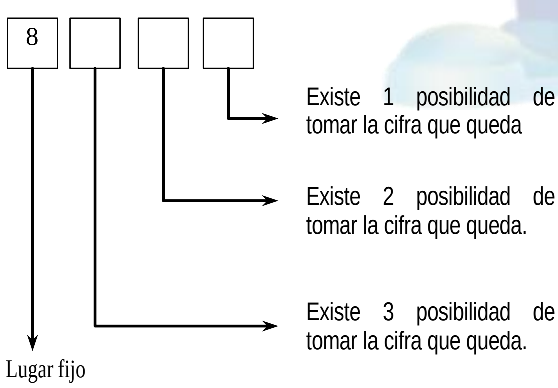
$$\boxed{P_{m-n} = (m-n)!}$$

Donde:

$\begin{cases} m: & \text{Representa el número total de elementos.} \\ n: & \text{Representa el número de elementos con lugares fijos.} \end{cases}$

Ejemplo:
¿Cuántos números mayores de 8000 se podrán formar con las siguientes cifras: 2, 5, 8 y 3.

Resolución:
Los números mayores de 8000, deben tener como primera cifra (lugar fijo) el 8



Luego:
Los números mayores de 8000 que pueden tomar con : 2, 5, 8 y 3 = 1 × 2 × 3 = 6

Por fórmula: $\boxed{P_{m-n} = (m-n)!}$

Donde:

$\begin{cases} m = 4: & \text{Elementos en total éstos son: 2, 5, 8 y 3} \\ n = 1: & \text{Elemento fijo es el 8} \end{cases}$

Luego:

$$\boxed{P_{4-1} = P_3 = 3! = 6}$$

COMBINACIONES

Se llama combinación a las variaciones que puedan formarse con varios elementos de modo que dos cualquiera de ellos difieran por lo menos en un elemento.

Ejemplo:
Sean los elementos: a, b, c, d. Combinaciones de los 4 elementos tomados de 2 en 2.

ab, ac, ad, bc, bd, dc

Fórmula para calcular el número de combinaciones de “m” elementos tomados “n” a la vez.

$$\boxed{C_n^m = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}}$$

En donde: m ≥ n ≥ 0

Así por ejemplo: $C_3^5 = \dfrac{5!}{2! \times 3!} = \dfrac{4 \times 5}{2} = 10$

Nota : Para las combinaciones el orden no interesa. Por ejemplo si queremos unir los puntos que se muestran; como se observará nosotros podemos empezar a unir por cualquiera de los puntos.

El orden para empezar a unirlos no interesa, ya que podemos empezar por cualquiera de ellos.

Diferencia entre combinaciones y variaciones
Las combinaciones se diferencian por sus elementos y las variaciones por el orden de los mismos.

Ejemplo: Dado el conjunto A = {a, b, c, d}. Calcular las variaciones y las combinaciones de los elementos de “A” tomados de 3 a la vez.

Resolución:

Combinaciones

abc abd bcd cda

Dos combinaciones son diferentes sólo si difieren por lo menos en un elemento.

Variaciones

abc	acb	bac	bca	cab	cba
abd	adb	bad	bda	dab	dba
acd	adc	cad	cda	dac	dca
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

Si cambiamos el orden de los elementos se produce una variación distinta a la anterior.

Nótese que: $C_3^4 = \dfrac{4!}{(4-3)!3!} = 4$ y $V_3^4 = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{4!}{1} = 24$

Propiedades:

1) El número de combinaciones de "m" elementos tomados de "n" en "n" es igual al número de combinaciones de "m" elementos tomados (m – n) en (m – n)

$$C_n^m = C_{m-n}^m \Rightarrow \text{combinaciones complementarias}$$

2) $$C_n^{m-1} + C_{n-1}^{m-1} = C_n^m$$

3) $$C_1^n = n$$

4) $$C_0^n = 1$$

5) $$C_{n-1}^n = n$$

6) $$C_r^n = \frac{n}{r} C_{r-1}^{n-1}$$

Ejemplo:

$$C_2^5 + C_3^5 = C_3^6 = \frac{6\times5\times4}{3!} = 20$$

PROBLEMAS DESARROLLADOS

1) ¿Cuántos numerales de la forma: $\overline{a\left(\frac{14}{a}\right)b\left(\frac{b}{3}\right)}_9$ existen?

Solución:

$$\overline{\underbrace{a\left(\frac{14}{a}\right)}b\left(\frac{b}{3}\right)}_9$$

a	b
2	0
7	3
	6

total = 2 x 3 = 6 números

2) Se desea viajar de Piura a Lima y se dispone de 3 barcos, 5 aviones, 4 buses (todos diferentes entre sí). ¿De cuántas maneras se puede viajar?

Solución:

Para viajar, lo puedes hacer, ya sea en:

Barco o avión o bus

N° de maneras = 3 + 5 + 4 = 12

3) ¿En cuántos ceros termina el desarrollo de 150!?

Solución:
Se observa que:

$$150 \div 5 = 30,\quad 30 \div 5 = 6,\quad 6 \div 5 = 1$$

Para obtener la respuesta se suma los cocientes de las divisiones sucesivas.

N° de ceros = 30 + 6 + 1 = 37
∴ Termina en 37 ceros

4) ¿Cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer con la palabra "ACAPARAR"?

Solución:

$$\text{Pr} = \frac{8!}{4!.2!} = 840$$

5) ¿De cuántas maneras pueden sentarse 8 personas alrededor de una mesa redonda?

Solución:
PC (8) = (8 – 1)! = 7! = 5040 maneras

6) De cuántas maneras distintas pueden sentarse en una banca de 6 asientos 4 personas.

Solución:
Interesa el orden en que están sentados
$\Rightarrow Maneras = V_4^6 = 6\times5\times4\times3 = 360$