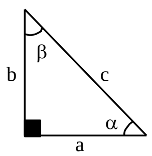
# RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

**1)** **Razón Trigonométrica**: Es el cociente que se establece entre dos de los lados de un triángulo rectángulo. Son seis razones trigonométricas:




c.o. = Cateto opuesto
c.a. = Cateto adyacente
Hip. = Hipotenusa

Seno = $\frac{\text{c.o.}}{\text{Hip}}$ ... (Sen $\alpha$ = b/c = Cos $\beta$)

Coseno = $\frac{\text{c.a.}}{\text{Hip.}}$ ... (Cos $\alpha$ = a/c = Sen $\beta$)

Tangente = $\frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$ ... (Tg $\alpha$ = b/a = Ctg $\beta$)

Cotangente = $\frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}}$ ... (Ctg$\alpha$ = a/b = Tg $\beta$)

Secante = $\frac{\text{Hip.}}{\text{c.a.}}$ ... (Sec $\alpha$ = c/a = Csc $\beta$)

Cosecante = $\frac{\text{Hip.}}{\text{c.o.}}$ ... (Csc$\alpha$=c/b = Sec $\beta$)

**2)** **Razones Recíprocas**:
Son recíprocas:

Sen $\alpha$ $\leftrightarrow$ Csc $\alpha$ | Sen$\alpha$ Csc $\alpha$ = 1
Cos $\alpha$ $\leftrightarrow$ Sec $\alpha$ — cumple ⇒ Cos$\alpha$ Sec $\alpha$ = 1
Tg $\alpha$ $\leftrightarrow$ Ctg $\alpha$ | Tg $\alpha$ Ctg $\alpha$ = 1

Nota: Si el producto de dos razones recíprocas es "1" entonces los ángulos son iguales.

**3)** **Razones de ángulos complementarios**:

La R.T. de un ángulo agudo es igual a la respectiva co–razón del ángulo complementario.

Si:
$\alpha+\beta$ = 90º $\xrightarrow{\text{cumple}}$ $\boxed{\text{RT }(\alpha) = \text{C–RT }(90–\alpha)}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sen }\alpha = \text{Cos }\beta\\ \text{Tg }\alpha = \text{Ctg }\beta\\ \text{Sec }\alpha = \text{Csc }\beta\end{array}\right\}\ \alpha + \beta = 90º$$

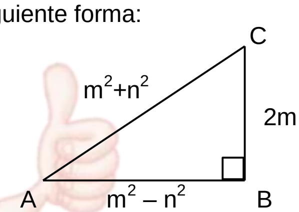
Nota: Para un ángulo "x"

Sen x = Cos (90º – x)
Tg x = Ctg (90º – x)
Sec x = Csc (90º – x)

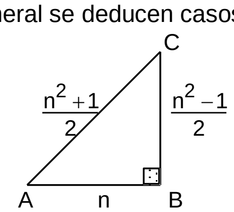
**4** **Propiedades**

- Toda RT o FT es una cantidad numérica adimensional.
- Toda RT sólo depende del ángulo respecto al cual se define.
- El seno y coseno toma valores entre 0 y 1.
- La tangente y cotangente toma valores mayores que cero.
- La secante y cosecante toma valores mayores que 1.

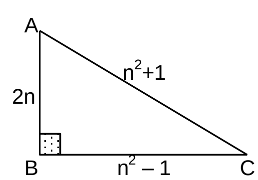
**5)** **Triángulos Pitagóricos**
Se denomina de esta manera a aquellos triángulos rectángulos cuya medida de sus lados están expresados por números enteros. Los lados de un triángulo pitagórico tienen la siguiente forma:



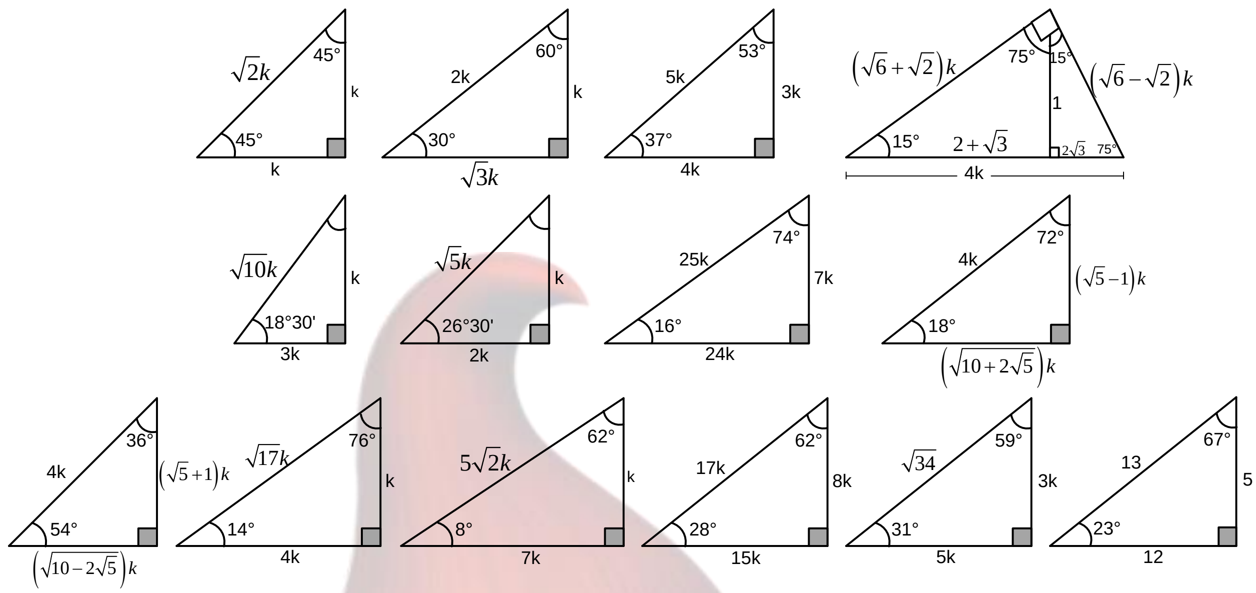

m y n son números enteros positivos.
m > n
De la forma general se deducen casos particulares:
n → impar (> 1)



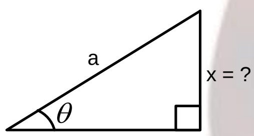

n → par (> 2)



**6) Triángulos Notables**

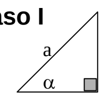



**7) Resolución de un Triángulo Rectángulo**



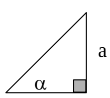

$$\text{Lado (x)} = (\text{Lado conocido}) \times \left(\frac{Necesito}{Tengo}\right)$$

**Caso I**



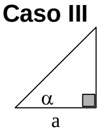

Cateto adyacente = a Cos $\alpha$
Cateto opuesto = a Sen $\alpha$

**Casto II**




Cateto adyacente = a Ctg $\alpha$
Hipotenusa = a Csc $\alpha$

**Caso III**

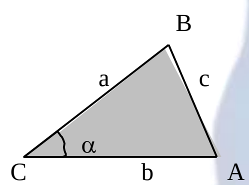



Cateto opuesto = a Tg $\alpha$
Hipotenusa = a Sec $\alpha$

**8) Área de un Triángulo cualquiera**

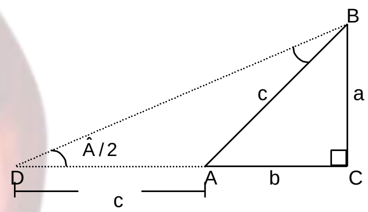
$$\text{Área}\Delta = \frac{\text{Base.altura}}{2}$$

$$\text{Área}\Delta = \frac{ab}{2}\text{Sen}\,\alpha$$




**9) Angulo Mitad**: Una forma práctica para calcular las razones trigonométricas de la mitad de un ángulo agudo es la siguiente:
Partimos de un triángulo rectángulo ABC (Ver figura).

Si queremos las razones trigonométricas de $\left(\frac{A}{2}\right)$ entonces prolongamos el cateto $\overline{CA}$ hasta un punto "D" tal que: $\overline{AD} = \overline{AB}$. Luego el triángulo DAB es isósceles $B\hat{D}A = \frac{\hat{A}}{2}$.




$$\therefore\ \text{Cot}\frac{\hat{A}}{2} = \frac{c+b}{a}$$

$$\text{Entonces: Cot}\frac{\hat{A}}{2} = \frac{c}{a}+\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\text{Cot}\frac{\hat{A}}{2} = \text{Csc}\hat{A}+\text{Cot}\hat{A}}$$

Análogamente:

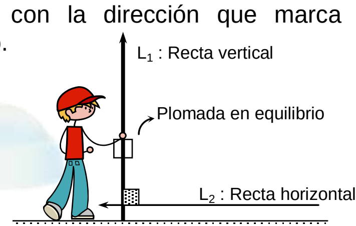
$$\text{Tan}\frac{\hat{A}}{2} = \frac{a}{b+c} = \frac{c-b}{a} \Rightarrow \boxed{\text{Tan}\frac{A}{2} = \text{Csc}\hat{A}-\text{Cot}\hat{A}}$$

# ÁNGULOS VERTICALES Y HORIZONTALES

En el presente tema estudiaremos aplicaciones de triángulos rectángulos, que tienen gran utilidad en la vida diaria; como por ejemplo: en la topografía, navegación.
Los ángulos verticales y horizontales tienen en común la referencia de un observador o punto de observación y el objeto observado.

**Definiciones importantes**:

a) **Línea vertical**: La vertical de un lugar es la línea que coincide con la dirección que marca la plomada en equilibrio.

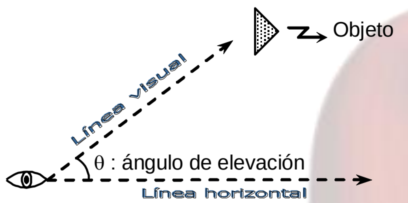



b) **Línea horizontal**: Es toda perpendicular a la línea vertical.
c) **Línea visual**: Es aquella línea imaginaria que une los ojos del observador con un punto al objeto, el cual se está observando.
d) **Plano vertical**: Es aquel plano que contiene una línea vertical.
e) **Plano horizontal**: Plano perpendicular a la vertical.

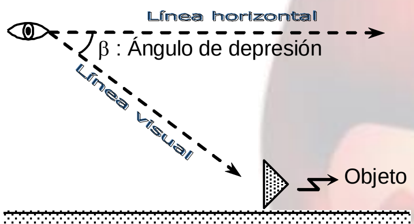
**ANGULOS VERTICALES**:

Son aquellos ángulos agudos contenidos en un plano vertical, el cual contiene tanto al observador como al objeto observado. Dentro de este tipo de ángulo tenemos el ángulo de elevación y el ángulo de presión.

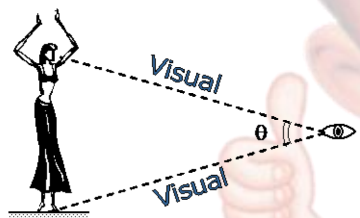
**1) <u>Ángulos de elevación ($\alpha$)</u>**: Se forma entre una línea horizontal que parte de la vista del observador y una línea visual, cuando el objeto observado se encuentra por encima de la línea horizontal.




**2) <u>Ángulo de depresión ($\beta$)</u>**: Se forma entre una línea horizontal que parte de la vista del observador y la visual, cuando el objeto observado se encuentra por debajo de dicha línea horizontal.

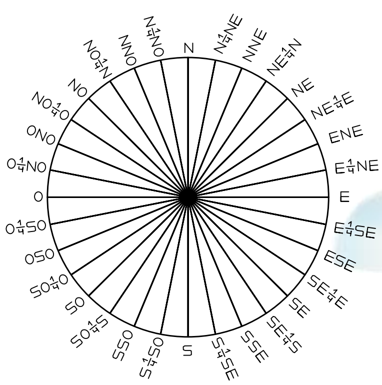



**3) <u>Ángulo de observación ($\theta$)</u>**: Es aquel ángulo formado por dos visuales que parten desde un mismo punto, al observar un objeto de un extremo a otro.



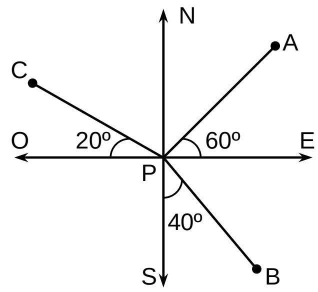

**<u>ÁNGULOS HORIZONTALES</u>**:
Son aquellos ángulos contenidos en un plano horizontal.

**La rosa náutica o compás marino**: Es la representación esquemática de la brújula náutica, la cual está dividida en 32 partes iguales, por tanto cada parte es 360º ÷ 32 = 11º15'.

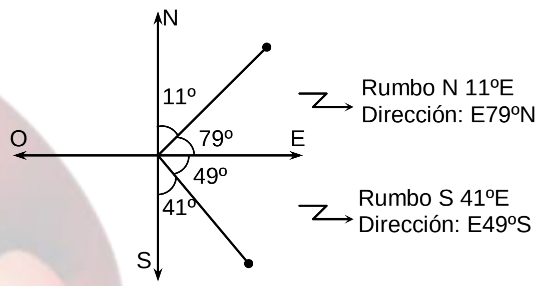



**<u>La Dirección</u>**:
La dirección de un punto "A" con relación a un observador "P" se puede dar de dos formas: el punto "A" se encuentra del Este 60º hacia el Norte (E60ºN) del punto "P" ó "A" se encuentra del norte 30º hacia el este (N30ºE) del punto "P".

"B" se encuentra en la dirección S40ºE del punto "P" o "B" se encuentra al E50ºS de "P".




**<u>El rumbo</u>**: Es una dirección la cual está dada como el ángulo entre la línea de dirección magnética norte, sur y la línea de dirección hacia el objeto.




Toda dirección no es un rumbo pero todo rumbo si es una dirección.
Del ejemplo anterior: N11ºE es un rumbo y también una dirección pero la dirección E79ºN no es un rumbo.

**<u>Situaciones combinadas</u>**
Cuando los enunciados de los problemas mencionan ángulos verticales (elevación o depresión) y ángulos horizontales (uso de direcciones), al mismo tiempo, la rosa náutica a emplear asume una posición más real: Es decir ubicada en un plano horizontal. Ejemplo:
Desde un punto en tierra, se divisa al norte lo alto de un poste con un ángulo de elevación "$\alpha$". Si luego nos desplazamos hacia el N60ºE, hasta ubicarnos al este del poste, el ángulo de elevación para su parte más alta sería "$\beta$". Ahora note la representación gráfica.